

UNITÀ 10 LA FRAZIONE COME NUMERO

Le conoscenze che devi avere

- Concetto di frazioni proprie, improprie, apparenti
- Concetto di frazioni equivalenti
- Concetto di frazione ridotta ai minimi termini

Le abilità che devi avere

- Trasformare una frazione in una equivalente
- Semplificare le frazioni

Le conoscenze che acquisirai

- La frazione come numero
- Le operazioni tra frazioni

Le abilità che acquisirai

- Saper operare con le frazioni

Lezioni

- 1 LA FRAZIONE COME NUMERO RAZIONALE
- 2 LA RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI RAZIONALI
- 3 L'ADDIZIONE
- 4 LA SOTTRAZIONE
- 5 LA MOLTIPLICAZIONE
- 6 LA DIVISIONE
- 7 LA POTENZA

La frazione come numero razionale

Nell'Unità precedente hai già imparato a usare la frazione come operatore. Vediamo ora come le frazioni possano risolvere problemi che nell'ambito dei numeri naturali non hanno soluzione. Iniziamo con un problema facile.

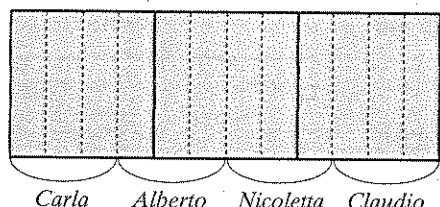
Problema. Fabio e Marco devono costruire figure in cartone colorato. Hanno in tutto 6 cartoncini congruenti, che devono dividersi in parti uguali. Quanti ne toccano a ciascuno?

È noto che il problema si risolve facilmente con l'operazione: $6 : 2 = 3$ (cartoncini per ognuno). Il **numero naturale 3** è perciò la **soluzione** del problema.

Consideriamo ora un problema analogo al precedente.

Problema. Carla, Alberto, Nicoletta e Claudio vogliono dividersi in parti uguali 3 cartoncini colorati congruenti per costruire delle figure. Quanti cartoncini toccheranno a ciascuno?

Per analogia ci viene spontaneo risolvere il problema allo stesso modo del precedente, cioè con l'operazione $3 : 4$. Si sa che questa operazione **non ha risultato nell'insieme dei numeri naturali**. Non è detto però che non si possa trovare una soluzione al problema "uscendo" dall'ambito dell'insieme N dei numeri naturali.



Rappresentiamo i tre fogli di cartoncino uno accanto all'altro.

Suddividiamo ogni foglio in 4 parti uguali e assegniamole ai ragazzi nel modo rappresentato in figura. Dividendo ogni foglio in 4 parti siamo riusciti a trovare una soluzione al problema.

Siamo però usciti dall'ambito di N , poiché i cartoncini non sono rimasti interi. A ogni ragazzo abbiamo assegnato $\frac{3}{4}$ di un foglio.

Riesce allora del tutto spontaneo considerare $\frac{3}{4}$ come il risultato della divisione $3 : 4$.

→ Una frazione può essere considerata come il quoziente di due numeri: il numeratore e il denominatore.

$$\frac{n}{m} = n : m$$

Consideriamo ora l'insieme delle frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$: $\left\{ \frac{3}{4}; \frac{6}{8}; \frac{9}{12}; \frac{12}{16}; \dots \right\}$

Eseguiamo la divisione $3 : 4$ procedendo nei calcoli con le cifre decimali.

$$\begin{array}{r} 3,00 \overline{)4} \\ 30 \overline{)0,75} \\ 20 \end{array}$$

Proviamo ora con altre frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{r} 6,00 \overline{)8} \\ 60 \overline{)0,75} \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,00 \overline{)12} \\ 90 \overline{)0,75} \\ 60 \end{array}$$

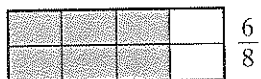
Questo ci porta a concludere che $\frac{3}{4}; \frac{6}{8}; \frac{9}{12}; \frac{12}{16}; \dots; 0,75$ sono **scritture diverse che rappresentano lo stesso numero**, risultato della divisione $3 : 4$. Questo numero viene chiamato **numero razionale assoluto**. Per indicare che $\frac{3}{4}$ è un rappresentante del numero razionale assoluto, scriveremo anche:

$$\frac{3}{4} \equiv \left\{ \frac{3}{4}; \frac{6}{8}; \frac{9}{12}; \dots \right\}$$



Ricorda che...

Due frazioni sono **equivalenti** se operando sull'intero ne fanno ottenere la stessa parte.



Data una frazione se ne possono ottenere infinite altre moltiplicando o dividendo per uno stesso numero diverso da zero sia il numeratore sia il denominatore.

Ad esempio:

$$\frac{20}{24} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{25}{30} \quad \dots$$

- 1 Trova il numero decimale corrispondente all'insieme di frazioni equivalenti $\left\{\frac{9}{15}; \frac{12}{20}; \frac{18}{30}; \dots\right\}$. Trova anche la frazione ridotta ai minimi termini che appartiene all'insieme. Tutte le frazioni precedenti, tutte quelle ad esse equivalenti e il numero decimale sono scritte diverse che rappresentano lo stesso
- 2 Il numero razionale assoluto $\frac{3}{2}$ può essere scritto anche mediante le frazioni $\frac{\dots}{\dots}$, $\frac{\dots}{\dots}$, $\frac{\dots}{\dots}$, oppure mediante il numero decimale
- 3 Nell'insieme delle frazioni equivalenti a $\frac{4}{5}$ esiste una frazione con denominatore uguale a 30? Perché?
- 4 Nell'insieme delle frazioni equivalenti a $\frac{2}{7}$ esiste una frazione avente come denominatore 24? Perché? E una frazione avente come denominatore 56?
- 5 Nell'insieme delle frazioni equivalenti a $\frac{6}{9}$ esiste una frazione avente come denominatore 12? Perché? E una frazione avente come denominatore 10?
- 6 Considera l'insieme di frazioni equivalenti a $\frac{2}{3}$ e quello delle frazioni equivalenti a $\frac{1}{2}$. Scrivi almeno le prime dieci frazioni di ogni insieme.
 - a Trova una coppia di frazioni, una appartenente al primo insieme e una appartenente al secondo, che abbiano lo stesso denominatore.
 - b Puoi trovare un'altra coppia di frazioni con lo stesso denominatore, ma diverso dal precedente?
 - c Quante coppie potresti trovare?
 - d Qual è la coppia avente il denominatore più piccolo, cioè il "minimo comune denominatore"?
- 7 Considera l'insieme di frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ e quello delle frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$. Scrivi almeno le prime dieci frazioni di ogni insieme. Trova la coppia di frazioni, una appartenente al primo insieme e una appartenente al secondo, che abbiano il "minimo comune denominatore".

La rappresentazione dei numeri razionali

Un numero naturale può essere considerato come un numero razionale. Osserviamo infatti:

Il numero naturale 1 può essere considerato come il numero razionale $\frac{1}{1}$.

$$1 = 1 : 1 = \frac{1}{1}$$

$$1 = 2 : 2 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 3 : 3 = \frac{3}{3}$$

$$\dots \quad \frac{1}{1} \equiv \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \dots \right\}$$

Il numero naturale 2 può essere considerato come il numero razionale $\frac{2}{1}$.

$$2 = 2 : 1 = \frac{2}{1}$$

$$2 = 4 : 2 = \frac{4}{2}$$

$$2 = 6 : 3 = \frac{6}{3}$$

$$\dots \quad \frac{2}{1} \equiv \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \dots \right\}$$

Possiamo allora affermare che:

→ il numero naturale n può essere sempre considerato come il numero razionale:

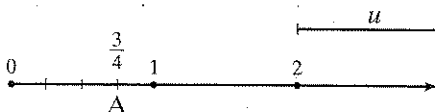
$$\frac{n}{1} \equiv \left\{ \frac{n}{1}, \frac{2n}{2}, \frac{3n}{3}, \frac{4n}{4}, \frac{5n}{5}, \dots \right\}$$

Rappresentiamo i numeri razionali assoluti su una semiretta.

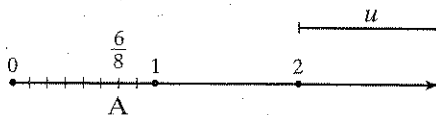
Disegniamo una semiretta, scegliamo il segmento unità, facciamo corrispondere all'origine il numero 0 e rappresentiamo su di essa i numeri naturali.

Rappresentiamo ora su di essa il numero razionale $\frac{3}{4}$.

Dividiamo l'unità in 4 parti e consideriamone 3. Il punto A è l'immagine di $\frac{3}{4}$.



Prendiamo ora un'altra frazione dello stesso insieme, ad esempio $\frac{6}{8}$, e operiamo con essa. Il punto A è ancora l'immagine di $\frac{6}{8}$.



Possiamo ragionevolmente pensare che ogni frazione appartenente all'insieme di frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$ abbia come immagine il punto A.

In generale, tutte le frazioni appartenenti a un insieme di frazioni equivalenti hanno come immagine lo stesso punto della semiretta.

Quindi una qualsiasi frazione appartenente all'insieme può **rappresentare** il numero razionale.

Per questo motivo d'ora in poi **useremo spesso una frazione** (in genere quella ridotta ai minimi termini) **per indicare un numero razionale assoluto**.

Comunque, tutte le volte che useremo il termine "**frazione** $\frac{3}{4}$ ", ricorderemo che essa, insieme a tutte le frazioni equivalenti, rappresenta un numero razionale.



Facciamo luce

NUMERI DECIMALI PARTICOLARI

La scrittura decimale dei numeri razionali può portare a qualche problema.

Cerchiamo per esempio la scrittura decimale corrispondente al numero razionale $\frac{2}{3}$.

Eseguiamo le divisioni $2:3$ e $4:6$.

$$\begin{array}{r} 2,000 \overline{)3} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,000 \overline{)6} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 40 \\ \underline{40} \\ \dots \end{array}$$

È evidente che ogni divisione non ha mai fine.

Ogni frazione appartenente all'insieme di frazioni equivalenti a $\frac{2}{3}$ dà luogo allo stesso numero decimale, che presenta una caratteristica non ancora esaminata: **ha infinite cifre decimali che si ripetono**.

Altri numeri razionali presentano la stessa caratteristica.

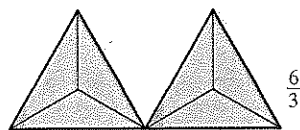
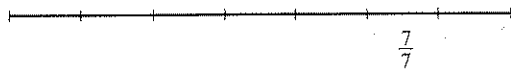
Affronteremo in modo più approfondito l'argomento nelle Lezioni del prossimo anno.



Ricorda che...

Una frazione si dice **apparente** quando il **numeratore è multiplo del denominatore**.

Ad esempio $\frac{7}{7}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{10}{5}$ sono frazioni apparenti.



Rappresentano uno o più interi.

Completa.

1 $1 = \frac{3}{\dots}$

$2 = \frac{\dots}{2}$

$1 = \frac{\dots}{2}$

$2 = \frac{\dots}{7}$

$4 = \frac{\dots}{1}$

$2 = \frac{8}{\dots}$

$3 = \frac{18}{\dots}$

2 $0 = 0 : 1 = \frac{0}{\dots}$

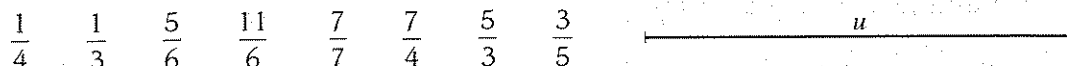
$0 = \dots : 2 = \frac{\dots}{\dots}$

$0 = \dots : 3 = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{0}{1} \equiv \left\{ \frac{0}{1}; \frac{0}{\dots}; \frac{0}{\dots}; \frac{0}{\dots}; \dots \right\}$

Il numero naturale 0 può essere considerato come il numero razionale $\frac{0}{1}$.

3 Scegliendo come unità di misura quella indicata, rappresenta sulla semiretta le seguenti frazioni.



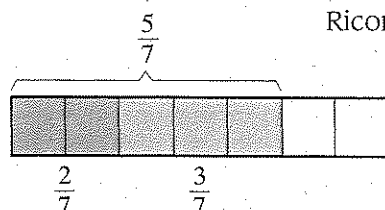
3 LEZIONE

L'addizione

Proseguiamo lo studio dell'insieme dei numeri razionali assoluti "operando" al suo interno, definendo cioè in esso le operazioni. Come già detto, useremo le frazioni come rappresentanti di numeri razionali. Iniziamo con lo studio dell'addizione.

1° caso Supponiamo di dover addizionare due frazioni aventi lo stesso denominatore. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

Ricorriamo alla rappresentazione grafica.



È facile vedere che: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

$\swarrow \quad \searrow \quad \downarrow$
 addendi somma

Analogamente: $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$

→ La somma di due o più frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione avente lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori.

2° caso Supponiamo ora di dover addizionare due frazioni di diverso denominatore. $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

Consideriamo il numero razionale individuato da ogni frazione.

Simulazione
n. 12



$$\frac{2}{3} \equiv \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \dots, \frac{24}{26}, \dots \right\}$$

$$\frac{1}{4} \equiv \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \frac{6}{24}, \frac{7}{28}, \dots, \frac{9}{36}, \dots \right\}$$

Cerchiamo ora coppie di frazioni, una appartenente al primo insieme e una al secondo, che abbiano lo stesso denominatore, ed eseguiamo le addizioni:

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{16}{24} + \frac{6}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{24}{36} + \frac{9}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} \dots$$

Usando qualsiasi coppia di frazioni si giunge a risultati equivalenti.

Tra le coppie è allora meglio scegliere quella che ha portato a meno calcoli, ossia la prima delle coppie, quella avente come denominatore il minimo comune multiplo tra i denominatori, cioè il minimo comune denominatore.

→ Per sommare due o più frazioni di diverso denominatore, si procede prima alla riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, poi si esegue la somma seguendo la regola precedente.

L'addizione nei numeri razionali assoluti gode delle stesse proprietà di cui gode nell'insieme dei naturali. Infatti, l'addizione tra numeri razionali è ricondotta alla somma dei numeratori e quindi alla somma di numeri naturali.

L'addizione è un'operazione interna all'insieme dei numeri razionali assoluti: la somma di due razionali assoluti è sempre un razionale assoluto.

È commutativa: $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$

È associativa: $\frac{2}{11} + \frac{4}{11} + \frac{1}{11} = \frac{2}{11} + \frac{5}{11}$

È dissociativa: $\frac{8}{11} + \frac{7}{11} = \frac{8}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11}$

Ha l'elemento neutro $\left(\frac{0}{n}\right)$: $\frac{3}{5} + \frac{0}{5} = \frac{3}{5}$

Esegui le addizioni (se il risultato non è una frazione ridotta ai minimi termini, riducila).

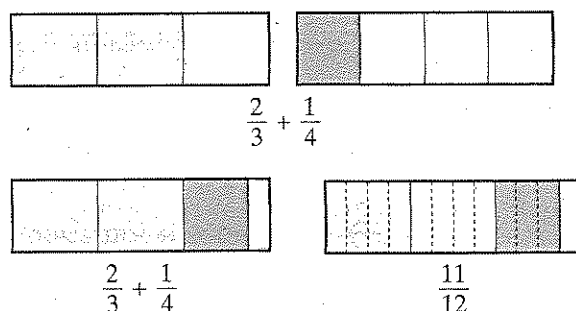
1 $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} =$ $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} =$ $\frac{4}{9} + \frac{6}{9} =$ $\frac{7}{2} + \frac{5}{2} =$ $\frac{8}{11} + \frac{4}{11} =$

2 $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} =$ $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} =$ $\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} =$ $\frac{7}{20} + \frac{9}{20} + \frac{2}{20} =$



Strategie matematiche L'ADDIZIONE CON I DISEGNI

Consideriamo di nuovo l'addizione $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, che abbiamo eseguito nella pagina precedente. Vogliamo ora svolgere la stessa operazione per via grafica, cioè mediante una figura. Operando su una figura ritroviamo per via grafica lo stesso risultato; e cioè $\frac{11}{12}$.



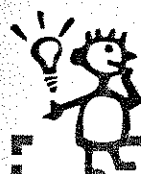
3 Esegui le seguenti addizioni.

$$\frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{\dots}{9} + \frac{\dots}{9} = \frac{\dots}{9}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\dots}{4} + \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{4}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\dots}{6} + \frac{\dots}{6} = \frac{\dots}{6}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{\dots}{8} + \frac{\dots}{8} = \frac{\dots}{8}$$



Strategie matematiche UNA SCRITTURA ABBREVIATA

Una scrittura più veloce per rappresentare l'addizione di frazioni può essere la seguente.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15 + 8}{20} = \frac{23}{20}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3 + 2 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Aniché ripetere il minimo comune denominatore in ogni frazione, lo si scrive una volta sola con un'unica linea di frazione che comprende tutti i numeratori.

Esegui le seguenti addizioni.

4 $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} =$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} =$ $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} =$ $\frac{7}{8} + \frac{5}{6} =$

5 $\frac{4}{5} + \frac{1}{10} + \frac{3}{5} =$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} =$ $\frac{7}{6} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} =$

Osserva gli esempi, poi esegui le addizioni.

$$1 + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} \quad \frac{3}{10} + 2 = \frac{3 + 20}{10} = \frac{23}{10}$$

6 $1 + \frac{7}{8} =$ $\frac{2}{3} + 3 =$

$$\frac{4}{7} + 2 =$$
 $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} =$

4

LEZIONE

La sottrazione

1° caso Eseguiamo la sottrazione tra due frazioni aventi lo stesso denominatore.

$$\frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$

Come già sappiamo, il risultato di una sottrazione, chiamato differenza, è quel numero che addizionato al sottraendo dà come risultato il minuendo.

$$\begin{array}{c} \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{minuendo} \quad \text{sottraendo} \quad \text{differenza} \end{array}$$

→ La differenza tra due frazioni, la prima maggiore o uguale alla seconda, aventi lo stesso denominatore, è la frazione avente lo stesso denominatore e come numeratore la differenza tra i due numeratori.

2° caso Eseguiamo la sottrazione tra due frazioni di diverso denominatore.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$$

Come nel caso dell'addizione, scegliamo due frazioni, equivalenti alle precedenti, che abbiano lo stesso denominatore, e cioè il minimo comune denominatore.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$$

→ Per eseguire la sottrazione tra due frazioni, la prima maggiore o uguale alla seconda, si procede prima alla riduzione al minimo comune denominatore, poi si trova la differenza secondo la regola precedente.

Osserviamo:

$$\begin{array}{ccc} & -\frac{4}{9} & \\ \frac{5}{9} & \xrightarrow{\quad} & \frac{1}{9} \\ & +\frac{4}{9} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & -\frac{3}{15} & \\ \frac{10}{15} & \xrightarrow{\quad} & \frac{7}{15} \\ & +\frac{3}{15} & \end{array}$$

Analogamente a quanto succedeva nell'insieme dei numeri naturali, la sottrazione è anche in questo ambito l'operazione inversa dell'addizione.

In ognuno dei due casi della sottrazione abbiamo specificato di eseguire tale operazione tra due frazioni, delle quali la prima sia maggiore o uguale alla seconda. Non è infatti possibile eseguire nell'insieme dei numeri razionali assoluti una sottrazione tra due frazioni delle quali la seconda sia maggiore della prima.

$\frac{3}{8} - \frac{7}{8}$, ad esempio, non si può eseguire nell'insieme dei numeri razionali assoluti.

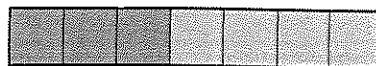
Non esiste infatti una frazione che, addizionata a $\frac{7}{8}$, dia come risultato $\frac{3}{8}$.

La sottrazione non è un'operazione interna all'insieme dei numeri razionali assoluti.

LE FRAZIONI COMPLEMENTARI

Due frazioni si dicono **complementari** se la loro somma costituisce una unità.

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = 1$$



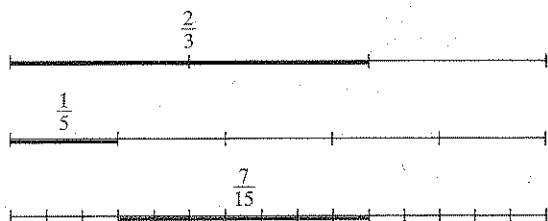
Data una frazione, si può determinare la sua complementare sottraendola dall'unità.

Data la frazione $\frac{5}{11}$, otteniamo la sua complementare eseguendo: $1 - \frac{5}{11} = \frac{11}{11} - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$



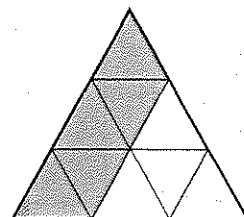
Strategie matematiche LA SOTTRAZIONE CON I DISEGNI

Operando sulle figure, ritroviamo per via grafica i risultati delle sottrazioni eseguite nella pagina precedente.



$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$



Esegui le sottrazioni.

$$1 \quad \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \quad \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \quad \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \quad \frac{5}{8} - \frac{3}{8} =$$

$$2 \quad \frac{13}{12} - \frac{5}{6} = \quad \frac{3}{7} - \frac{3}{14} = \quad \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \quad \frac{29}{20} - \frac{3}{4} =$$

$$3 \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \quad \frac{11}{8} - \frac{2}{3} = \quad \frac{7}{9} - \frac{3}{5} = \quad \frac{7}{6} - \frac{3}{4} =$$

4 Dopo aver osservato gli esempi, esegui le sottrazioni.

$$1 - \frac{3}{14} = \frac{14}{14} - \frac{3}{14} = \frac{11}{14} \quad 3 - \frac{7}{4} = \frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$$

$$2 - \frac{3}{8} = \quad 4 - \frac{7}{6} =$$

5 Trova la complementare di ogni frazione seguendo l'esempio.

$$\frac{4}{9} \rightarrow \text{complementare } \frac{5}{9} \text{ infatti } 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{7}{10} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{20}{27} \quad \frac{35}{41} \quad \frac{18}{53}$$

6 Esiste la frazione complementare di $\frac{6}{5}$? Perché?

7 Completa le uguaglianze.

$$\frac{1}{2} + \frac{\dots}{\dots} = 1 \quad \frac{3}{5} + \frac{\dots}{\dots} = 2$$

$$\frac{3}{7} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{13}{7} \quad \frac{4}{9} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{11}{8}$$

8 Calcola il valore delle seguenti espressioni. (Valgono le stesse regole stabilite in N; in particolare, se l'espressione contiene solo addizioni e sottrazioni, si eseguono le operazioni nell'ordine in cui sono scritte.)

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \quad 1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \quad \frac{3}{8} + 1 - \frac{1}{2} = \quad 1 + \frac{2}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$$

9 In una sottrazione il sottraendo è $\frac{2}{5}$ e il minuendo $\frac{7}{8}$. Qual è la differenza?



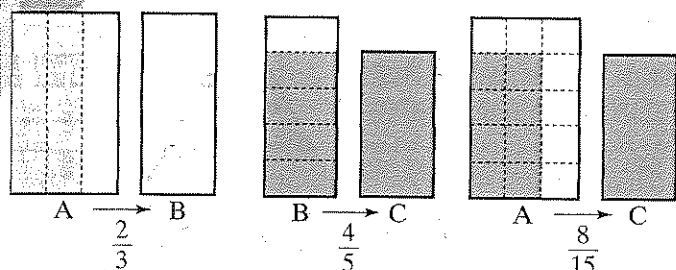
Strategie matematiche LA PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLA SOTTRAZIONE

Anche nei numeri razionali assoluti la sottrazione gode della **proprietà invariantiva**: aggiungendo o sottraendo una stessa frazione a entrambi i termini di una sottrazione, la differenza non cambia.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{10+3}{15}\right) - \left(\frac{5+2}{10}\right) = \frac{13}{15} - \frac{7}{10} = \frac{26-21}{30} = \frac{1}{6}$$

La moltiplicazione

Procediamo ora definendo la moltiplicazione tra numeri razionali assoluti.



Applichiamo alla figura A la frazione $\frac{2}{3}$: otteniamo la figura B.

Applichiamo alla figura B la frazione $\frac{4}{5}$: otteniamo la figura C.

Notiamo che avremmo potuto ottenere la figura C direttamente dalla figura A applicando la frazione $\frac{8}{15}$.

Osserviamo che questa frazione ha come numeratore il prodotto dei numeratori delle due frazioni e come denominatore il prodotto dei due denominatori.

Definiamo allora la frazione $\frac{8}{15}$ come la frazione prodotto

tra le frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \rightarrow \text{prodotto}$$

fattori

→ Si definisce **prodotto di due frazioni** la frazione che ha come numeratore il prodotto dei numeratori e come denominatore il prodotto dei denominatori.

Il prodotto di più frazioni si ottiene moltiplicando le prime due tra loro, il loro prodotto per la terza e così via. Allo stesso risultato si perviene moltiplicando tra loro tutti i numeratori, poi moltiplicando tra loro tutti i denominatori.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{84} = \frac{5}{28} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

La moltiplicazione nei numeri razionali assoluti gode delle stesse proprietà di cui gode nell'insieme dei numeri naturali.

La moltiplicazione è un'operazione interna all'insieme dei numeri razionali assoluti, infatti il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale.

È commutativa: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

È associativa: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7}$

È dissociativa: $\frac{2}{7} \cdot \frac{6}{25} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$

Ha l'elemento neutro (1): $1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$$\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$$

Ha l'elemento assorbente (0): $0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{0}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$$\frac{4}{7} \cdot 0 = 0$$

Vale inoltre la proprietà distributiva rispetto alla somma e alla sottrazione.

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} + \frac{2}{12} = \frac{4+2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{6-1}{10} \right) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{9}{20} - \frac{3}{40} = \frac{18-3}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$



Facciamo luce

LA MOLTIPLICAZIONE E IL RAPPRESENTANTE DEL NUMERO

Verifichiamo che il prodotto di due numeri razionali non dipende dalla frazione che scegliamo come rappresentante del numero.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{12}{15} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{6}{14} \cdot \frac{10}{4} = \frac{60}{56} = \frac{15}{14}$$

$$\frac{10}{15} \cdot \frac{8}{10} = \frac{80}{150} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{9}{21} \cdot \frac{20}{8} = \frac{180}{168} = \frac{15}{14}$$

Esegui le moltiplicazioni (riduci ai minimi termini le frazioni che non lo sono).

$$1 \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} =$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{11} =$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$3 \cdot \frac{4}{5} =$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{7} =$$

$$2 \quad \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{14}{12} =$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{9}{15} =$$



Strategie matematiche

UNA REGOLA PER IL CALCOLO

Eseguiamo la moltiplicazione: $\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

Osserviamo che il denominatore della prima frazione è divisibile per 5, come pure il numeratore della seconda. Allo stesso risultato si perviene se, prima di eseguire il prodotto, dividiamo per 5 il denominatore della prima e il numeratore della seconda.

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{5^1}{3} = \frac{4}{9}$$

Analogamente: $\frac{1}{4} \cdot \frac{4^1}{21} = \frac{1}{21}$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{10^2}{3} \cdot \frac{3^1}{2} = \frac{4}{15}$$

Questo tipo di semplificazione, possibile solo nella moltiplicazione, è detta **semplificazione incrociata** (o "in croce").

Calcola i prodotti, eseguendo prima le semplificazioni incrociate.

$$3 \quad \frac{7}{12} \cdot \frac{25}{28} = \quad \frac{7}{5} \cdot \frac{20}{21} = \quad \frac{13}{10} \cdot \frac{5}{26} = \quad \frac{30}{11} \cdot \frac{22}{9} = \quad \frac{19}{6} \cdot \frac{4}{3} = \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{28}{15} = \quad \frac{6}{55} \cdot \frac{35}{18} =$$

$$4 \quad \frac{25}{45} \cdot \frac{15}{20} = \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{42}{18} = \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{25} \cdot \frac{5}{12} = \quad 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \quad \frac{11}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \quad \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{24} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{20}{10} =$$

6 LEZIONE

La divisione

LA FRAZIONE INVERSA

Osserviamo innanzi tutto le seguenti moltiplicazioni:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1 \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{24}{24} = 1 \quad \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{70}{70} = 1$$

Le frazioni delle coppie precedenti, per le quali il prodotto è 1, si dicono una inversa dell'altra.

→ Si dice **frazione inversa** di $\frac{a}{b}$ la frazione che moltiplicata per $\frac{a}{b}$ dà come prodotto 1.

In pratica, la frazione inversa di $\frac{a}{b}$ è la frazione $\frac{b}{a}$ che si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore.

LA DIVISIONE

Cominciamo con il considerare un caso semplice di divisione, che ci consentirà però di mettere a punto un procedimento di calcolo valido in tutti i casi: $1 : \frac{4}{5}$

Eseguire una divisione tra frazioni significa trovare una frazione, chiamata **quoziente**, che moltiplicata per il divisore dia come risultato il dividendo.

$$\frac{\dots}{\dots} \cdot \frac{4}{5} = \quad \text{La frazione inversa ci offre la soluzione desiderata.}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1 \quad \text{Si può quindi affermare che:} \quad 1 : \frac{4}{5} = \frac{5}{4}$$

Osserviamo che allo stesso risultato saremmo giunti moltiplicando l'unità per la frazione inversa di $\frac{4}{5}$.

$$1 : \frac{4}{5} = 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Passiamo ora a un caso più generale.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$$

Proviamo a seguire la strada precedente.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Verifichiamo che $\frac{14}{15}$ è il quoziente cercato.

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7} = \frac{70}{105} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{dividendo}$$

↙ ↘
quoziente divisore

→ Il **quoziente di due frazioni**, delle quali la seconda diversa da 0, si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inversa della seconda.

Osserviamo:

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.

$$\begin{array}{c} \cdot \frac{5}{7} \\ \frac{2}{3} \quad \frac{14}{15} \\ \cdot \frac{5}{7} \end{array}$$

Osserviamo inoltre che è sempre possibile eseguire la divisione tra due frazioni, purché la seconda sia diversa da 0; il quoziente è ancora una frazione. Possiamo dire allora che la **divisione è un'operazione interna all'insieme dei razionali assoluti** (o che l'insieme dei razionali assoluti è chiuso rispetto alla divisione).

1 Scrivi la frazione inversa di ognuna delle seguenti frazioni.

$$\frac{4}{5} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{20}{13} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{11}{12}$$

2 Puoi affermare che la frazione inversa di una frazione propria è sempre una frazione impropria? Verifica la tua risposta con esempi.

Esegui le divisioni.

$$3 \quad \frac{3}{8} : \frac{6}{5} = \quad \frac{4}{25} : \frac{2}{15} = \quad \frac{8}{9} : \frac{1}{9} = \quad 1 : \frac{3}{4} = \quad 4 \quad \frac{7}{8} : \frac{3}{16} = \quad 4 : \frac{1}{2} = \quad \frac{12}{5} : \frac{4}{15} = \quad \frac{20}{21} : \frac{6}{25}$$

Completa in modo da rendere vere le uguaglianze.

$$5 \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{\dots}{\dots} = 1 \quad \frac{\dots}{\dots} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \quad \frac{\dots}{\dots} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \quad 6 \quad \frac{\dots}{\dots} \cdot \frac{8}{11} = \frac{1}{11} \quad \frac{4}{9} \cdot \frac{\dots}{\dots} = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{\dots}{\dots} = \frac{5}{4}$$



Strategie matematiche

LA PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLA DIVISIONE

Anche nei numeri razionali assoluti la divisione gode della **proprietà invariantiva**: moltiplicando o dividendo per una stessa frazione, diversa da zero, entrambi i termini di una divisione, il quoziente non cambia.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} : \frac{4}{15} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{5}{2} \\ &\swarrow \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \right) : \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{4} : \frac{1}{10} = \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ &\searrow \left(\frac{2}{3} : \frac{4}{9} \right) : \left(\frac{4}{15} : \frac{4}{9} \right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} \right) : \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{9}{4} \right) = \frac{3}{2} : \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni. (Valgono le stesse regole stabilite in N; in particolare, si eseguono prima le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui sono scritte, poi le addizioni e le sottrazioni.)

$$7 \quad \frac{3}{4} : \frac{6}{5} : \frac{5}{2} =$$

$$10 : \frac{6}{11} : \frac{22}{3} =$$

$$11 \quad 1 + \frac{1}{5} : \frac{3}{25} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{5}{3} =$$

$$8 \quad \frac{14}{15} : \frac{2}{5} : \frac{7}{9} =$$

$$\frac{18}{25} : 9 : \frac{3}{10} =$$

$$12 \quad \frac{27}{81} : \frac{4}{33} : \frac{11}{3} =$$

$$\frac{72}{25} : \frac{7}{45} : \frac{9}{14} =$$

$$9 \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} : \frac{35}{2} =$$

$$\frac{21}{30} : \frac{49}{45} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$13 \quad \frac{38}{14} \cdot \frac{35}{57} : \frac{28}{90} =$$

$$\frac{9}{22} : \frac{54}{15} \cdot \frac{44}{35} =$$

$$10 \quad \frac{23}{22} : \frac{69}{110} \cdot \frac{9}{5} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{5}{3} =$$

$$14 \quad \frac{6}{35} : \frac{9}{7} + \frac{8}{45} : \frac{4}{5} =$$

$$\frac{24}{49} \cdot \frac{7}{6} - \frac{4}{39} : \frac{12}{13} =$$

7 LEZIONE

La potenza

Consideriamo ora la potenza di una frazione: $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\nearrow$ *esponente*
 $\searrow$ *base (la base è una frazione)*

Analogamente a quanto fatto per i numeri naturali, definiamo la potenza come il prodotto di tanti fattori uguali alla base quanti ne indica l'esponente.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

→ Per elevare a potenza una frazione si elevano a quella potenza entrambi i termini della frazione.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

In particolare, si pone per definizione: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$

L'uso della parentesi tonda è indispensabile per indicare la potenza di una frazione. Infatti, possiamo verificare che le scritture seguenti portano a risultati diversi.

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \rightarrow \frac{16}{25}$	$\frac{4^2}{5} \rightarrow \frac{16}{5}$	$\frac{4}{5^2} \rightarrow \frac{4}{25}$
<i>si eleva a potenza tutta la frazione</i>	<i>si eleva a potenza solo il numeratore</i>	<i>si eleva a potenza solo il denominatore</i>

Le proprietà delle potenze viste nell'insieme dei numeri naturali valgono anche nell'insieme dei razionali assoluti.

- Il **prodotto** di due o più potenze aventi la **stessa base** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
- Il **quoziente** di due potenze aventi la **stessa base** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti. $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$
- Il **prodotto** di due o più potenze aventi lo **stesso esponente** è una potenza che ha lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3$
- Il **quoziente** di due potenze aventi lo **stesso esponente** è una potenza che ha lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} : \frac{4}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3$
- La **potenza** di una potenza è una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$

Calcola le seguenti potenze.

1 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$ $\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$ $\frac{4^2}{3} =$ $\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$ $\left(\frac{3}{7}\right)^0 =$ $\left(\frac{3}{5}\right)^3 =$ $\left(\frac{2}{7}\right)^2 =$

2 $\left(\frac{11}{12}\right)^1 =$ $\left(\frac{1}{7}\right)^2 =$ $\frac{2^3}{3^2} =$ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ $\frac{3}{8^2} =$ $\frac{4}{3^2} =$ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

Applicando le proprietà delle potenze, calcola le seguenti espressioni (lascia eventualmente il risultato sotto forma di potenza).

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} =$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$ $\left(\frac{3}{5}\right)^5 : \left(\frac{3}{5}\right)^3 =$ $\left(\frac{2}{5}\right)^7 : \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^4 =$

4 $\left(\frac{4}{7}\right)^6 : \left(\frac{4}{7}\right)^5 =$ $\left(\frac{1}{3}\right)^7 : \left(\frac{1}{3}\right)^5 =$ $\left(\frac{10}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{14}{25}\right)^2 =$ $\left(\frac{6}{7}\right)^3 : \left(\frac{3}{14}\right)^3 =$ $\left(\frac{3}{7}\right)^3 : \left(\frac{9}{2}\right)^3 =$

5 $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 =$ $\left\{\left[\left(\frac{3}{11}\right)^6\right]^7\right\}^0 =$ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 =$ $\left(\frac{6}{7}\right)^3 : \left(\frac{3}{14}\right)^3 =$ $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^6 =$

6 $\left\{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2 \cdot \frac{1}{3}\right\} : \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$ $\left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^6 =$ $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 =$ $\left[\frac{1}{3} : \frac{4}{25} : \frac{27}{64}\right]$

Completa la tabella e le frasi.

7

a	a ²	a ³
$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$		

Le basi delle potenze nella tabella sono unità frazionarie.

La potenza di un'unità frazionaria è

Le potenze di un'unità frazionaria sono (> o <) della base.

8

a	a ²	a ³
$\frac{2}{3}$		
$\frac{3}{4}$		
$\frac{2}{5}$		
$\frac{5}{6}$		

Le basi delle potenze nella tabella sono frazioni proprie.

La potenza di una frazione propria è una frazione

La potenza di una frazione (con esponente maggiore di 1) è (> o <) della base.

9

a	a ²	a ³
$\frac{3}{2}$		
$\frac{5}{4}$		
$\frac{7}{5}$		
$\frac{5}{3}$		

Le basi delle potenze nella tabella sono frazioni

La potenza di una frazione è una frazione

La potenza di una frazione (con esponente maggiore di 1) è (> o <) della base.

Riassumiamo quello che abbiamo studiato...

LA FRAZIONE COME NUMERO

Ogni frazione può essere considerata come il quoziente tra il numeratore e il $\frac{3}{4} = 3 : 4$

$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{15}{16}, \dots; 0,75$ sono scritture diverse che rappresentano lo stesso numero.
Questo numero si chiama **numero razionale assoluto**.

Le operazioni tra frazioni

POTENZA

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

ADDIZIONE

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

È sempre possibile eseguire l'addizione di due numeri razionali.
È un'operazione all'insieme dei numeri razionali.

Ha l'elemento neutro:

$$\frac{2}{5} + \dots = \dots + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Proprietà
Tutte quelle dell'addizione nei numeri naturali: commutativa, , dissociativa.

SOTTRAZIONE

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{15-4}{20} = \frac{11}{20}$$

È l'operazione dell'addizione.

Proprietà
La stessa proprietà della sottrazione nei numeri naturali:

MOLTIPLICAZIONE

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{10}$$

È sempre possibile eseguire la moltiplicazione di due numeri razionali.
È un'operazione all'insieme dei numeri razionali.

Ha l'elemento neutro:
Ha l'elemento assorbente:

Proprietà
Tutte quelle della moltiplicazione nei numeri naturali: commutativa, associativa, , distributiva rispetto alla

DIVISIONE

$$\frac{15}{8} : \frac{9}{4} = \frac{15}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{15 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{15 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{2}$$

È sempre possibile eseguire la divisione di due numeri razionali, purché il secondo sia diverso da
È un'operazione all'insieme dei numeri razionali.

È l'operazione della moltiplicazione.

Proprietà
La stessa proprietà della divisione nei numeri naturali:

UNITÀ

9

LA FRAZIONE COME OPERATORE

il numero

Le conoscenze che devi avere

- Il sistema decimale
- Concetti di multiplo e divisore

Le abilità che devi avere

- Applicare le tecniche di calcolo con i numeri naturali e i numeri decimali limitati
- Calcolare il M.C.D e il m.c.m. di due o più numeri

Le conoscenze che acquisirai

- Consapevolezza di come agisce l'operatore frazionario
- Come si confrontano le frazioni
- Che cosa sono una frazione propria, impropria, apparente
- Concetto di frazioni equivalenti
- Capire che i numeri naturali non bastano a descrivere la realtà, poiché esistono problematiche relative a parti di interi

Le abilità che acquisirai

- Risolvere problemi con operatori frazionari
- Arricchire il linguaggio
- Incrementare la capacità di risoluzione dei problemi

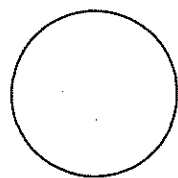
Lezioni

- 1 LE FRAZIONI
- 2 FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE, APPARENTI
- 3 COME OPERA UNA FRAZIONE: IL PROBLEMA DIRETTO
- 4 COME OPERA UNA FRAZIONE: IL PROBLEMA INVERSO
- 5 LE FRAZIONI EQUIVALENTI
- 6 IL CONFRONTO DI FRAZIONI
- 7 I PROBLEMI DEL "TERZO TIPO"

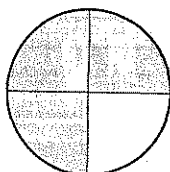
LEZIONE

Le frazioni

Certamente nel corso degli studi precedenti hai già incontrato le frazioni. Il termine "frazione" deriva dal verbo latino *frangere*, che significa spezzare. La parola *frazione* richiama infatti l'idea della "parte" o delle parti di un intero. Ripassiamo con un esempio quanto già sai.



torta
l'intero



$\frac{3}{4}$ della torta

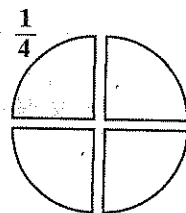
$\xrightarrow{3}$ **numeratore**
(indica il numero delle parti da considerare)
 $\xrightarrow{\quad}$ **linea di frazione**
 $\xrightarrow{4}$ **denominatore**
(il numero delle parti uguali in cui deve essere diviso l'intero)

termini della frazione

Il numeratore e il denominatore sono sempre numeri naturali.

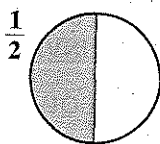
Il simbolo $\frac{3}{4}$ si legge "tre quarti".

Ognuna delle parti uguali in cui è stata suddivisa la torta si indica con $\frac{1}{4}$ e prende il nome di **unità frazionaria**.

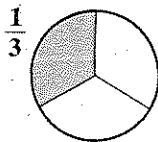


LE UNITÀ FRAZIONARIE

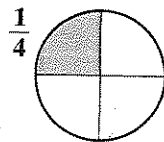
Osserviamo le caratteristiche delle unità frazionarie relative a uno stesso intero.



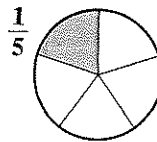
$\frac{1}{2}$



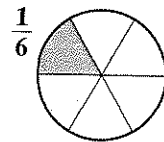
$\frac{1}{3}$



$\frac{1}{4}$



$\frac{1}{5}$



$\frac{1}{6}$



$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$

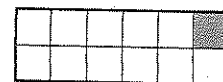


$\frac{1}{4}$



$\frac{1}{6}$

La parte rappresentata dall'unità frazionaria rispetto all'intero diminuisce all'aumentare del denominatore.

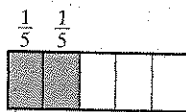


$\frac{1}{12}$

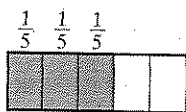
Sommando tra loro unità frazionarie aventi lo stesso denominatore, si può costruire la successione delle frazioni aventi lo stesso denominatore.



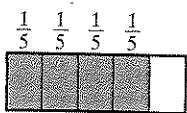
$\frac{1}{5}$



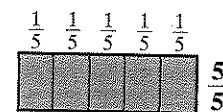
$\frac{2}{5}$



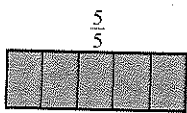
$\frac{3}{5}$



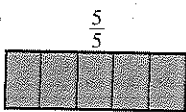
$\frac{4}{5}$



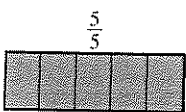
$\frac{5}{5}$



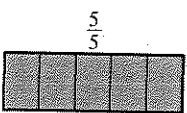
$\frac{6}{5}$



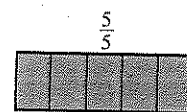
$\frac{7}{5}$



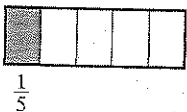
$\frac{8}{5}$



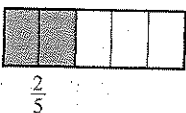
$\frac{9}{5}$



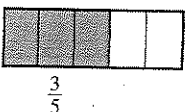
$\frac{10}{5}$



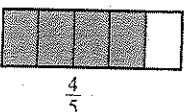
$\frac{1}{5}$



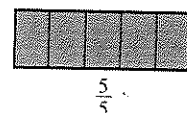
$\frac{2}{5}$



$\frac{3}{5}$



$\frac{4}{5}$



$\frac{5}{5}$

Un po' di storia

Le prime frazioni

Fin dall'antichità gli uomini si trovarono ad affrontare situazioni che non potevano essere risolte con i numeri naturali.

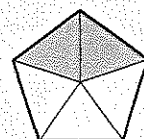
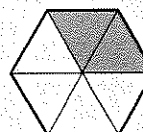
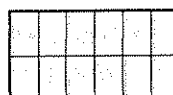
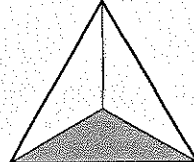
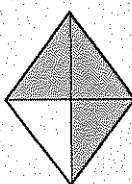
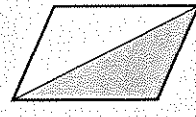
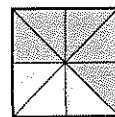
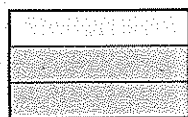
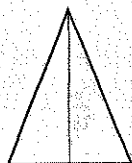
Già nel papiro di Rhind del II millennio a.C. troviamo riferimenti alle frazioni.

Nella scuola pitagorica, famosissima nella Magna Grecia nel V-IV secolo a.C., scuola che si occupava di matematica, di filosofia, di musica e di astronomia, lo studio delle frazioni ebbe un ruolo notevole.

Nel III secolo d.C. Diofanto cominciò a considerare l'insieme delle frazioni come un insieme di numeri.

Di quest'ultimo concetto ci occuperemo più a fondo nella Lezione successiva. ■

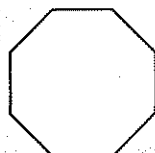
- 1 Scrivi la frazione che rappresenta la parte colorata rispetto all'intera figura.



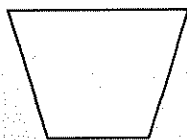
- 2 Suddividi opportunamente ogni figura e colora la parte corrispondente alla frazione indicata.



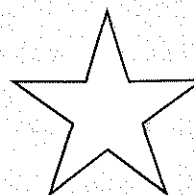
$\frac{3}{5}$



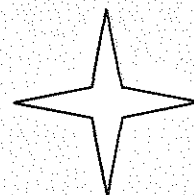
$\frac{3}{8}$



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{5}$



$\frac{1}{4}$

- 3 Completa la tabella seguendo l'esempio.

Frazione	Denominatore	Numeratore	Unità frazionaria corrispondente	Intero corrispondente
$\frac{2}{3}$	3	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$
$\frac{7}{10}$				
$\frac{4}{5}$				
$\frac{5}{7}$				
$\frac{8}{11}$				



Facciamo luce

PERCHÉ SI CHIAMA "DENOMINATORE"

Il **denominatore** di una frazione ha questo nome perché il numero che sta sotto la linea di frazione "denomina" la frazione, cioè caratterizza la frazione, dandole il nome.

$\frac{3}{2}$ → tre mezzi

$\frac{5}{3}$ → cinque terzi

$\frac{2}{4}$ → due quarti

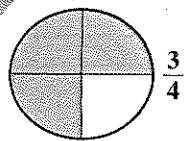
$\frac{4}{5}$ → quattro quinti ecc.

2 LEZIONE

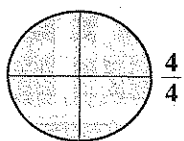
Frazioni proprie, improprie, apparenti

Le ultime considerazioni della Lezione precedente ci conducono a interessanti osservazioni sulle frazioni.

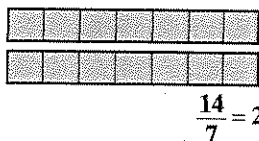
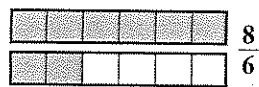
Vediamo i casi che si sono presentati nella costruzione della successione delle frazioni.



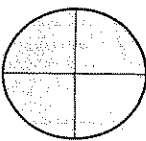
- La frazione rappresenta una effettiva parte dell'intero: il suo numeratore è minore del denominatore. Si dice allora **frazione propria**.



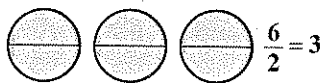
- La frazione rappresenta una parte uguale o maggiore dell'intero: il suo numeratore è uguale o maggiore dell'intero. Si dice allora **frazione impropria**.



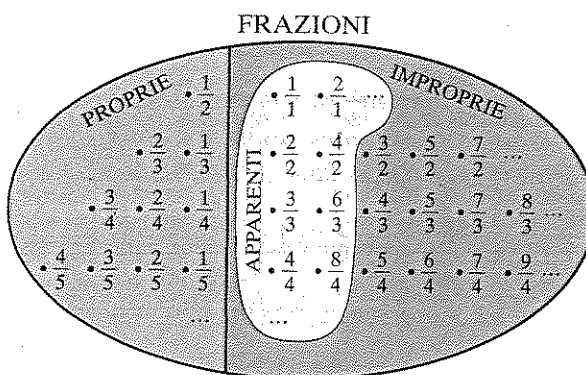
- Tra le frazioni improprie sono comprese alcune frazioni particolari: quelle il cui numeratore è multiplo del denominatore. Queste prendono il nome di **frazioni apparenti**. (Si dicono "apparenti" perché in realtà rappresentano uno o più interi.)



$$\frac{4}{4} = 1$$



Rappresentiamo l'insieme delle frazioni mediante un diagramma di Eulero-Venn.



In sintesi:

→ una frazione $\frac{n}{m}$ si dice:

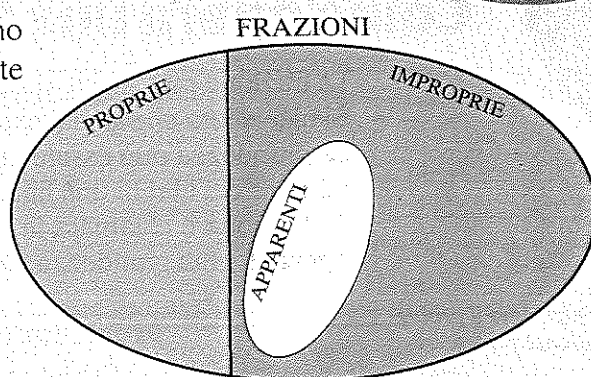
- **propria** se il suo numeratore è minore del denominatore ($n < m$);
- **impropria** se il suo numeratore è uguale o maggiore del denominatore ($n \geq m$);
- **apparente** una frazione impropria il cui numeratore è multiplo del denominatore ($n = km$, con k numero naturale diverso da 0).

Fai attenzione! Non abbiamo mai preso in considerazione il caso in cui il denominatore sia 0: non ha infatti alcun senso dividere l'intero in 0 parti!

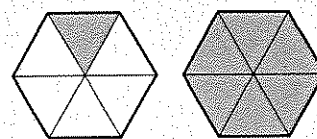
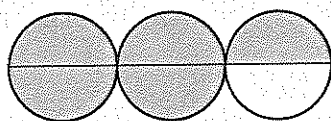
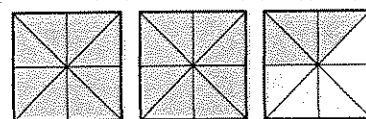
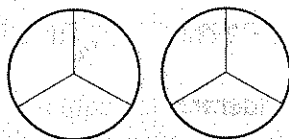
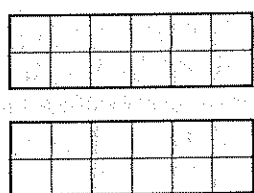
- 1 Poni le seguenti frazioni nell'insieme al quale possono appartenere. (Attento: ricorda che una frazione apparente è un caso particolare di frazione impropria!)

$$\frac{1}{2} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{3} \quad \frac{10}{11} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{9}$$

$$\frac{14}{7} \quad \frac{20}{31} \quad \frac{15}{5} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{20}{20} \quad \frac{15}{19}$$



- 2 In ogni disegno indica la frazione rappresentata dalla parte colorata.



- 3 Trova quanti interi sono contenuti in ciascuna delle seguenti frazioni improprie.

$$\frac{8}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = 1 \text{ (intero)} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{7}{2} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\frac{10}{3} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\frac{9}{4} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\frac{7}{3} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\frac{10}{9} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\frac{12}{6} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

4 Per fare un intero occorrono quinti $\frac{5}{5} = 1$

Per fare un intero occorrono mezzi $\frac{\dots}{\dots} = 1$

Per fare un intero occorrono settimi $\frac{\dots}{\dots} = 1$

Per fare due interi occorrono quarti $\frac{8}{4} = 2$

Per fare due interi occorrono terzi $\frac{\dots}{\dots} = 2$

Per fare tre interi occorrono sesti $\frac{\dots}{\dots} = 3$

- 5 Scrivi accanto a ogni frazione il numero degli interi corrispondenti.

$$\frac{15}{3} = \dots\dots \quad \frac{18}{9} = \dots\dots \quad \frac{16}{4} = \dots\dots$$

$$\frac{16}{8} = \dots\dots \quad \frac{12}{4} = \dots\dots \quad \frac{20}{4} = \dots\dots$$

$$\frac{35}{5} = \dots\dots \quad \frac{27}{9} = \dots\dots \quad \frac{24}{6} = \dots\dots$$

- 6 Scrivi:

- tre frazioni proprie aventi denominatore 10;
- tre frazioni improprie, ma non apparenti, aventi denominatore 10;
- tre frazioni apparenti aventi denominatore 10.

- 7 Scrivi:

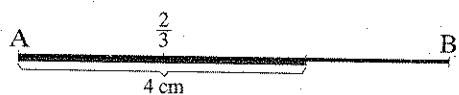
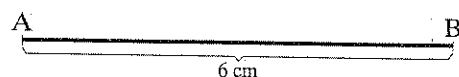
- tutte le frazioni proprie aventi denominatore 9;
- alcune frazioni improprie aventi denominatore 9. Potresti ora scriverle tutte?

3 LEZIONE

Come opera una frazione: il problema diretto

La frazione può essere usata per trovare **una parte** di una grandezza o di un numero. Si dice allora che si utilizza la frazione come **operatore** sulla grandezza, sul numero. La grandezza può essere una lunghezza, un'area, un peso, ecc. Un numero può essere il numero dei libri di una libreria, il numero dei soldati di una caserma, ecc. La frazione è chiamata in questo caso **operatore** perché indica il modo in cui si deve operare sulla grandezza. Vediamo alcuni esempi.

Schematizziamo il problema mediante figure.



Problema. Il segmento AB misura 6 cm. Determina i suoi $\frac{2}{3}$.

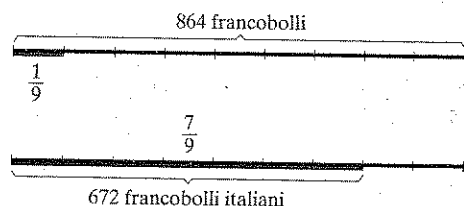
Dividiamo il segmento AB (che rappresenta l'intero) nelle parti uguali indicate dal denominatore, cioè 3; troviamo così la lunghezza di ogni parte:

$$\overline{AB} : 3 = 6 \text{ cm} : 3 = 2 \text{ cm} \quad \left(\frac{1}{3} \text{ di } \overline{AB} \right)$$

Le parti da considerare, indicate dal numeratore, sono 2. Moltiplichiamo allora la lunghezza di una parte per 2:

$$2 \text{ cm} \cdot 2 = 4 \text{ cm} \quad \left(\frac{2}{3} \text{ di } \overline{AB} \right)$$

Problema. Nella collezione di francobolli di Alberto, costituita da 864 francobolli, $\frac{7}{9}$ sono italiani. Quanti sono i francobolli italiani di Alberto?



Anche se il problema non tratta di segmenti, può essere schematizzato mediante segmenti.

Dividiamo il totale dei francobolli (cioè l'intero) in 9 parti uguali; troviamo così il valore di $\frac{1}{9}$:

$$864 \text{ francobolli} : 9 = 96 \text{ francobolli} \quad \left(\frac{1}{9} \right)$$

Le parti da considerare, indicate dal numeratore, sono 7. Moltiplichiamo allora il valore di una parte per 7:

$$96 \text{ francobolli} \cdot 7 = 672 \text{ francobolli} \quad \left(\frac{7}{9}, \text{ ossia francobolli italiani} \right)$$

In sintesi:

→ per determinare $\frac{n}{m}$ di un intero (grandezza o numero puro) è necessario:

- dividere l'intero per m , cioè dividere l'intero in tante parti uguali quante ne indica il denominatore, trovando così il valore di $\frac{1}{m}$;
- moltiplicare il valore di $\frac{1}{m}$ per n , cioè considerare tante parti uguali quante ne indica il numeratore.

Ogni problema in cui si conosce il valore dell'intero e si deve determinare il valore di una sua parte è chiamato **problema diretto**.

Simulazione
n. 10



Esercizio guidato

- 1 Il segmento EF è lungo 63 millimetri. Determina la lunghezza del segmento IL congruente ai $\frac{3}{7}$ di EF.

Dati

$$\overline{EF} = 63 \text{ mm}$$

$$\overline{IL} = \frac{3}{7} \overline{EF}$$

$$63 \text{ mm} : \dots = \dots \text{ mm}$$

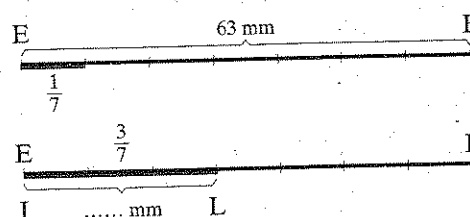
$$\dots \text{ mm} \cdot \dots = \dots \text{ mm}$$

Domanda

$$\overline{IL} = ?$$

$$\left(\frac{\dots}{\dots} \text{ di } \overline{EF} \right)$$

$$\left(\frac{3}{7} \overline{EF} = \overline{IL} \right)$$



- 2 Il segmento PQ misura 88 mm. Determina la lunghezza del segmento MN congruente ai $\frac{5}{8}$ di PQ.
- 3 Il segmento UV è i $\frac{4}{5}$ del segmento ST, che misura 65 mm. Determina la misura di UV.
- 4 Il segmento AB è i $\frac{2}{9}$ del segmento CD, che misura 10,8 cm. Determina la misura di AB.

Esercizio guidato

- 5 Il peso di Davide è 72 kg. Il peso del figlio Nicolò è $\frac{5}{9}$ di quello del padre. Quanto pesa Nicolò?

Dati

$$\text{Peso di Davide} = 72 \text{ kg}$$

$$\text{Peso di Nicolò} = \frac{5}{9} \text{ del peso di Davide}$$

$$72 \text{ kg} : \dots = \dots \text{ kg}$$

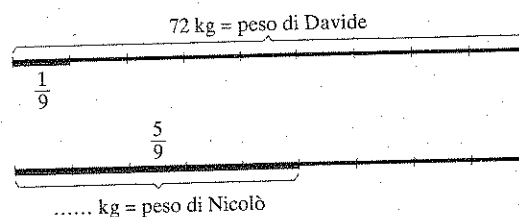
$$\dots \text{ kg} \cdot \dots = \dots \text{ kg}$$

Domanda

$$\text{Peso di Nicolò} = ?$$

$$\left(\frac{\dots}{\dots} \right)$$

$$\left(\frac{5}{9} \text{ peso di Nicolò} \right)$$



- 6 Federica ha 40 anni. L'età della figlia Maria è $\frac{1}{8}$ di quella della madre. Quanti anni ha Maria?
- 7 In una scatola di 48 cioccolatini i $\frac{2}{3}$ sono al liquore. Quanti sono i cioccolatini al liquore? E quelli non al liquore?
- 8 Di un debito di 1400 euro Luisa paga subito i $\frac{4}{7}$. Quanto le resta da pagare?
- 9 Per pagare un'auto del costo di 14 400 euro, Piero paga subito i $\frac{5}{18}$, poi i $\frac{2}{9}$. Quanto gli resta da pagare?

4 LEZIONE

Come opera una frazione: il problema inverso

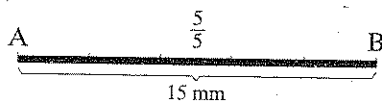
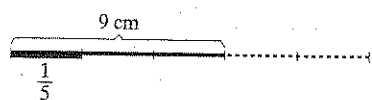
Può succedere di conoscere il valore di una parte dell'intero, rappresentata da una frazione, e di voler determinare quanto vale l'intero. Anche in questo caso la frazione è utilizzata come *operatore*.

Vediamo, mediante alcuni esempi, qual è in questa situazione il modo di operare.

Simulazione n. 11.



Schematizziamo il problema mediante figure.



Problema. $\frac{3}{5}$ del segmento AB misurano 9 cm. Quanto è lungo AB?

Il segmento AB è l'intero, di cui conosciamo una parte espressa in quinti.

L'intero segmento AB potrà quindi essere rappresentato come $\frac{5}{5}$.

Dividendo il valore di $\frac{3}{5}$ per 3 troviamo il valore di $\frac{1}{5}$:

$$9 \text{ cm} : 3 = 3 \text{ cm} \left(\frac{1}{5} \right)$$

Poiché l'intero è formato da $\frac{5}{5}$, moltiplicando il valore di $\frac{1}{5}$ per 5, si troverà il valore dell'intero:

$$3 \text{ cm} \cdot 5 = 15 \text{ cm} \left(\frac{5}{5}, \overline{AB} \right)$$

Problema. In una scatola di biscotti quelli alla mandorla sono 18 e rappresentano $\frac{3}{7}$ di tutti i biscotti. Quanti sono i biscotti nella scatola?

Dividendo il numero dei biscotti alla mandorla in 3 parti uguali, troviamo il valore di $\frac{1}{7}$:

$$18 \text{ biscotti} : 3 = 6 \text{ biscotti} \left(\frac{1}{7} \right)$$

L'intero, cioè il totale dei biscotti nella scatola, è rappresentato da $\frac{7}{7}$; moltiplichiamo allora il valore di $\frac{1}{7}$ per 7:

$$6 \text{ biscotti} \cdot 7 = 42 \text{ biscotti} \left(\frac{7}{7}, \text{cioè l'intero} \right)$$

In sintesi:

→ per determinare un intero (grandezza o numero puro) conoscendone i suoi $\frac{n}{m}$ è necessario:

- dividere il valore della parte nota per n (numeratore), trovando così il valore di $\frac{1}{m}$;
- moltiplicare il valore di $\frac{1}{m}$ per m (denominatore), cioè per il numero di parti uguali che costituiscono l'intero.

Ogni problema in cui si conosce il valore della parte e si deve determinare il valore dell'intero è chiamato **problema inverso**.

Esercizio guidato

- 1 Determina la misura del segmento PQ, sapendo che il segmento RS misura 3,6 cm ed è congruente ai $\frac{4}{11}$ di PQ.

Dati

$$\overline{RS} = 3,6 \text{ cm}$$

$$\overline{RS} = \frac{4}{11} \overline{PQ}$$

$$3,6 \text{ cm} : \dots = \dots \text{ cm}$$

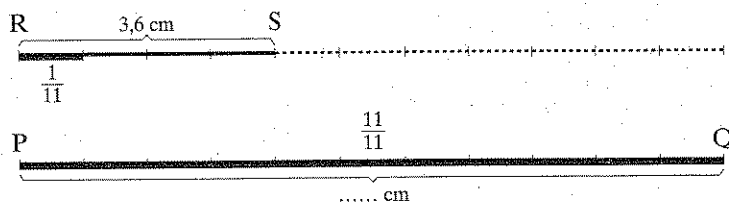
$$\dots \text{ cm} \cdot \dots = \dots \text{ cm}$$

Domanda

$$\overline{PQ} = ?$$

$$\left(\frac{\dots}{\dots} \right)$$

$$\left(\frac{11}{11}, \overline{PQ} \right)$$



- 2 Il segmento EF misura 7,7 cm ed è $\frac{7}{15}$ del segmento GH. Determina la lunghezza di GH.

- 3 I $\frac{3}{8}$ del segmento MN misurano 8,7 cm. Quanto misura l'intero segmento MN?

- 4 Determina la lunghezza del segmento AB, sapendo che i suoi $\frac{5}{13}$ misurano 45 mm.

- 5 Un volo aereo Roma-Parigi dura circa 2 ore, che rappresentano $\frac{1}{5}$ della durata di un volo Roma-New York. Quanto tempo occorre per andare da Roma a New York in aereo?

Esercizio guidato

- 6 In un addobbo floreale per una cerimonia sono state impiegate 51 rose, cioè $\frac{3}{10}$ di tutti i fiori. Quanti fiori sono stati usati in tutto? (Nello spazio a destra, eseguite la schematizzazione del problema mediante figure.)

Dati

51 = rose nell'addobbo

$$\text{rose} = \frac{3}{10} \text{ di tutti i fiori}$$

$$51 \text{ rose (fiori)} : \dots = \dots \text{ fiori}$$

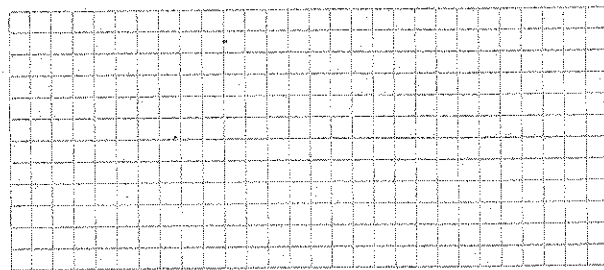
$$\dots \text{ fiori} \cdot \dots = \dots \text{ fiori}$$

Domanda

$$\text{Tutti i fiori} = ?$$

$$\left(\frac{\dots}{\dots} \right)$$

$$\left(\frac{\dots}{\dots}, \text{tutti i fiori} \right)$$



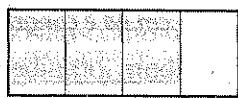
- 7 Facendo una cura dimagrante il signor Piero ha perso 5,6 kg, cioè $\frac{2}{41}$ del peso iniziale. Quanto pesava prima della cura?

- 8 I $\frac{12}{17}$ di un giardino sono coltivati a prato; la parte rimanente è occupata da aiuole di fiori. Se il prato è 3600 m², quanto è vasto tutto il giardino? Quanti metri quadrati sono adibiti ad aiuole?

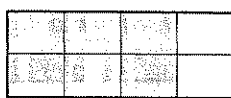
5 LEZIONE

Le frazioni equivalenti

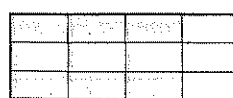
Consideriamo dei rettangoli congruenti. Operiamo su di essi con le seguenti frazioni.



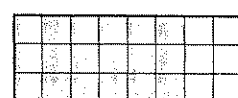
$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{6}{8}$$



$$\frac{9}{12}$$



$$\frac{18}{24}$$

Le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{18}{24}$, pur avendo numeratori e denominatori diversi, hanno operato sull'intero facendone ottenere la stessa parte. Si dicono allora **frazioni equivalenti**.

In generale:

→ due o più frazioni sono equivalenti se, operando sull'intero, ne fanno ottenere la stessa parte (o, in altre parole, se rappresentano la stessa parte dell'intero).

Osserviamo ancora le frazioni scritte sopra: solo $\frac{3}{4}$ ha il numeratore e il denominatore primi tra loro.

Si dice allora che $\frac{3}{4}$ è **ridotta ai minimi termini**.

Le altre frazioni si possono ottenere da $\frac{3}{4}$ moltiplicando per lo stesso numero naturale entrambi i termini della frazione:

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\cdot 3} \frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\cdot 4} \frac{12}{16}$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\cdot 6} \frac{18}{24}$$

Viceversa, $\frac{3}{4}$ si può ottenere, ad esempio, da $\frac{18}{24}$ dividendo numeratore e denominatore per 6:

$$\frac{18}{24} \xrightarrow{:6} \frac{3}{4}$$

In generale:

→ moltiplicando o dividendo (quando è possibile) il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero naturale, diverso da 0, si ottiene una frazione equivalente a quella data. Questa proprietà è chiamata **proprietà invariantiva delle frazioni**.

Preso una frazione, se ne possono ottenere infinite altre, tutte equivalenti a quella data e equivalenti tra loro, applicando la proprietà invariantiva.

$$\frac{2}{5} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{6}{15} \quad \frac{8}{20} \quad \dots \quad \frac{14}{35} \quad \frac{16}{40} \quad \frac{18}{45} \quad \dots \quad \frac{30}{75} \quad \dots$$

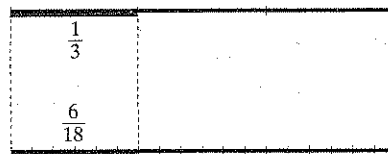
Esercizio guidato

- 1 In una scatola sono contenuti 36 biscotti. Andrea ne mangia $\frac{1}{3}$, Lucia $\frac{6}{18}$. Chi ne mangia di più?

$$36 \text{ biscotti} : 3 = 12 \text{ biscotti} \quad \left(\frac{1}{3}, \text{ mangiati da Andrea} \right)$$

$$36 \text{ biscotti} : \dots = \dots \text{ biscotti} \quad \left(\frac{1}{18} \right)$$

$$2 \text{ biscotti} \cdot \dots = \dots \text{ biscotti} \quad \left(\frac{6}{18}, \text{ mangiati da Lucia} \right)$$



Andrea e Lucia hanno mangiato quantità di biscotti.

Le frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{6}{18}$ hanno operato sull'intero dei biscotti dando luogo alla stessa quantità: sono perciò

- 2 Scrivi almeno cinque frazioni equivalenti a $\frac{2}{7}$. Scrivi almeno cinque frazioni equivalenti a $\frac{4}{11}$.

- 3 Indica con una crocetta le coppie di frazioni tra loro equivalenti.

☐ $\frac{6}{5}$ e $\frac{18}{15}$

☐ $\frac{4}{6}$ e $\frac{16}{24}$

☐ $\frac{7}{8}$ e $\frac{14}{18}$

☐ $\frac{2}{13}$ e $\frac{7}{18}$

☐ $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{8}$

☐ $\frac{4}{6}$ e $\frac{10}{15}$



Strategie matematiche LE FRAZIONI RIDUCIBILI

Se una frazione non è ridotta ai minimi termini si dice **riducibile**, in quanto può essere ridotta ai minimi termini applicando la proprietà invariantiva.

$\frac{16}{24}$ è una frazione riducibile. Per ridurla ai minimi termini si possono seguire due modi.

1. Si determina il M.C.D.(16; 24), cioè 8, e si dividono il numeratore e il denominatore per 8.

$$\frac{16}{24} \xrightarrow[:8]{:8} \frac{2}{3}$$

oppure con scrittura più breve

$$\frac{16^2}{24_3} = \frac{2}{3}$$

2. Si eseguono divisioni successive del numeratore e del denominatore per fattori comuni.

$$\frac{16}{24} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{8}{12} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{4}{6} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{2}{3}$$

oppure con scrittura più breve

$$\frac{16^{2 \cdot 2 \cdot 2}}{24_{12 \cdot 2}} = \frac{2}{3}$$

In generale, si dice che si **semplifica una frazione** quando la si trasforma in una equivalente con termini minori. Una frazione ridotta ai minimi termini si dice anche **irriducibile**.

- 4 Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni con il metodo indicato.

$$\frac{30}{36}$$

$$\text{M.C.D.}(30; 36) = \dots$$

$$\frac{30}{36} = \frac{\dots}{\dots}$$

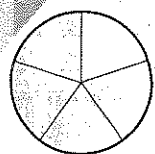
$$\frac{28}{42} = \frac{\dots}{\dots} \quad \frac{18}{27} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{27}{45} = \frac{\dots}{\dots}$$

6 LEZIONE

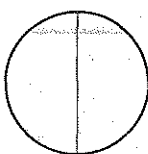
Il confronto di frazioni

Confrontare due frazioni significa stabilire quale delle due, operando sull'intero, dà risultato maggiore, minore o uguale all'altra.



$$\frac{4}{5}$$

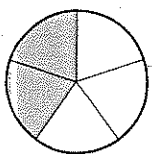
$$\frac{4}{5} < \frac{3}{2}$$



$$\frac{3}{2}$$

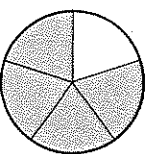
1° CASO: LE FRAZIONI SONO UNA PROPRIA E UNA IMPROPRIA
Poiché una frazione propria rappresenta una parte minore dell'intero, mentre ogni frazione impropria una parte maggiore, la frazione propria è sempre minore di quella impropria.

→ Fra due frazioni, una propria e una impropria, è sempre maggiore quella impropria.



$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$$

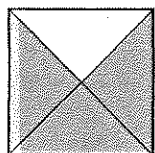


$$\frac{4}{5}$$

2° CASO: LE FRAZIONI HANNO LO STESSO DENOMINATORE

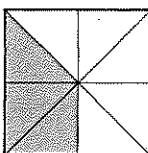
La frazione minore è evidentemente quella con il numeratore minore.

→ Fra due frazioni aventi lo stesso denominatore, è maggiore quella con il numeratore maggiore.



$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$$



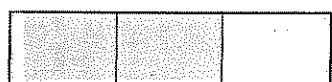
$$\frac{3}{8}$$

3° CASO: LE FRAZIONI HANNO LO STESSO NUMERATORE

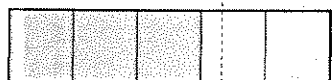
Consideriamo ad esempio $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$. Rappresentiamole.

Il denominatore maggiore indica che l'intero deve essere diviso in un numero maggiore di parti, ciascuna delle quali risulta quindi più piccola di quelle ottenute col denominatore minore.

→ Fra due frazioni aventi lo stesso numeratore, è maggiore quella con il denominatore minore.



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{3}{5}$$

4° CASO: LE FRAZIONI NON RIENTRANO IN ALCUNO DEI CASI PRECEDENTI

Consideriamo ad esempio $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

Rappresentando entrambe le frazioni possiamo giungere a stabilire qual è la maggiore. Non sempre però è agevole passare alla rappresentazione grafica. È bene quindi sfruttare regole di calcolo che ci consentano di confrontare le frazioni senza doverle rappresentare.

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{10}{15} & \frac{9}{15} \end{array}$$

m.c.m.(3; 5) = 15

Trasformiamo entrambe le frazioni in frazioni equivalenti, che abbiano lo **stesso denominatore**: le frazioni potranno così essere confrontate senza difficoltà (2° caso). Il nuovo denominatore dovrà essere multiplo di entrambi i denominatori: per evitare inutili calcoli, sceglieremo il più piccolo tra i multipli possibili e lo chiameremo **minimo comune denominatore**.

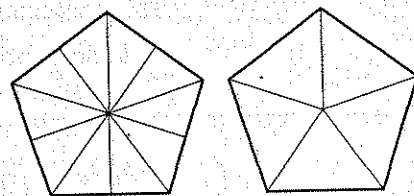
Poiché $\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$ deduciamo che la stessa relazione sussiste tra le frazioni di partenza:

$$\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

1 Operando sul segmento a fianco verifica che la frazione $\frac{4}{7}$ è minore della frazione $\frac{6}{7}$.

intero

2 Operando con i colori sulla figura a fianco verifica visivamente che $\frac{3}{10} < \frac{3}{5}$.



3 Senza operare su alcun intero, spiega perché la frazione $\frac{7}{8}$ è minore della frazione $\frac{3}{2}$.

4 Metti al posto dei puntini il simbolo opportuno ($>$, $<$, $=$), motivando la tua scelta (riduci ai minimi termini le frazioni che non lo sono).

$$\frac{8}{11} \dots \frac{5}{4} \dots\dots\dots$$

$$\frac{7}{6} \dots \frac{7}{9} \dots\dots\dots$$

$$\frac{5}{13} \dots \frac{7}{13} \dots\dots\dots$$

$$\frac{4}{3} \dots \frac{15}{17} \dots\dots\dots$$

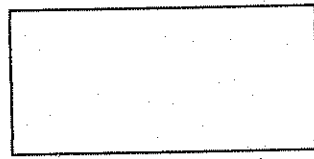
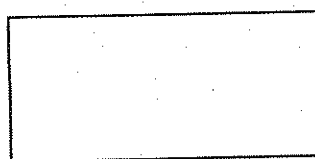
$$\frac{22}{44} \dots \frac{7}{14} \dots\dots\dots$$

$$\frac{21}{22} \dots \frac{11}{5} \dots\dots\dots$$

Esercizio guidato

1 Operando sui rettangoli confronta le frazioni $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{9}$.

Confronta poi le stesse frazioni seguendo "la strada dei calcoli".



$$\begin{array}{c} \frac{5}{6} \\ \downarrow \\ \frac{\dots}{\dots} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{7}{9} \\ \downarrow \\ \frac{\dots}{\dots} \end{array}$$

Trasforma ogni frazione in una equivalente avente come denominatore il m.c.m.(6; 9), determina cioè il minimo comune denominatore tra 6 e 9.
m.c.d.(6; 9) =

Poiché $\frac{\dots}{\dots} \dots \frac{\dots}{\dots}$, è anche $\frac{5}{6} \dots \frac{7}{9}$.

Hai così ritrovato con il calcolo ciò che avevi stabilito con la rappresentazione delle frazioni.

6 Confronta le seguenti frazioni trasformandole in frazioni equivalenti (se incontri frazioni non ridotte, riducile ai minimi termini).

$$\frac{15}{16} \dots \frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{5} \dots \frac{5}{6}$$

$$\frac{12}{16} \dots \frac{15}{20}$$

$$\frac{17}{15} \dots \frac{7}{6}$$

$$\frac{10}{9} \dots \frac{23}{21}$$

$$\frac{14}{25} \dots \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{2} \dots \frac{3}{8}$$

$$\frac{18}{5} \dots \frac{13}{4}$$

$$\frac{9}{10} \dots \frac{14}{15}$$

$$\frac{3}{8} \dots \frac{5}{12}$$

I problemi del "terzo tipo"

1° CASO: SOMMA E FRAZIONE

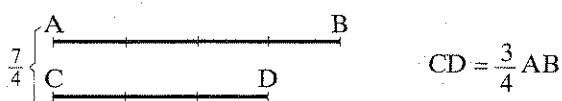
Può succedere che di due numeri si conoscano:

- la **somma**
- la **frazione** che esprime un numero rispetto all'altro e si vogliono determinare i due numeri.

Vediamo con un esempio come affrontare situazioni di questo genere.

Problema. La somma delle misure dei segmenti AB e CD è 84 cm; il segmento CD è $\frac{3}{4}$ di AB. Determina la lunghezza di ogni segmento.

Poiché CD è $\frac{3}{4}$ di AB, possiamo considerare AB come l'intero, costituito perciò da $\frac{4}{4}$.



La somma di AB e CD è costituita allora da:

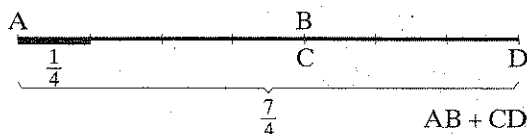
$$\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

Questi $\frac{7}{4}$ misurano complessivamente 84 cm.

Per trovare la misura di $\frac{1}{4}$ basterà allora dividere 84 cm per 7:

$$84 \text{ cm} : 7 = 12 \text{ cm} \quad \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$12 \text{ cm} \cdot 4 = 48 \text{ cm} \quad \left(\frac{4}{4}, \overline{AB}\right) \quad 12 \text{ cm} \cdot 3 = 36 \text{ cm} \quad \left(\frac{3}{4}, \overline{CD}\right)$$



2° CASO: DIFFERENZA E FRAZIONE

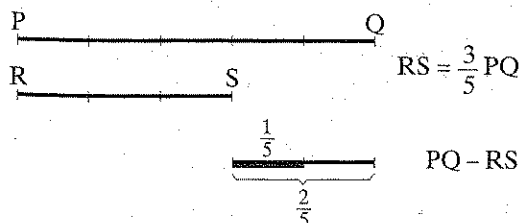
Può succedere, invece, che di due numeri si conoscano:

- la **differenza**
- la **frazione** che esprime un numero rispetto all'altro e si vogliono determinare i due numeri.

Vediamo con un esempio come affrontare situazioni di questo genere.

Problema. La differenza delle misure dei segmenti PQ ed RS è 22 cm; il segmento RS è $\frac{3}{5}$ di PQ. Determina la lunghezza di PQ ed RS.

Poiché RS è $\frac{3}{5}$ di PQ, possiamo considerare PQ come l'intero, costituito perciò da $\frac{5}{5}$.



La differenza di PQ ed RS è costituita allora da:

$$\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Questi $\frac{2}{5}$ misurano complessivamente 22 cm.

Per trovare la misura di $\frac{1}{5}$ basterà allora dividere 22 cm per 2:

$$22 \text{ cm} : 2 = 11 \text{ cm} \quad \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$11 \text{ cm} \cdot 5 = 55 \text{ cm} \quad \left(\frac{5}{5}, \overline{PQ}\right) \quad 11 \text{ cm} \cdot 3 = 33 \text{ cm} \quad \left(\frac{3}{5}, \overline{RS}\right)$$

Esercizi guidati

- 1 La somma delle misure dei segmenti EF e GH è 16,2 cm. Determina la lunghezza di EF e di GH, sapendo che GH è $\frac{2}{7}$ di EF.

Dati

$$\overline{EF} + \overline{GH} = 16,2 \text{ cm}$$

$$\overline{GH} = \frac{2}{7} \overline{EF}$$

Domanda

$$\overline{EF} = ?$$

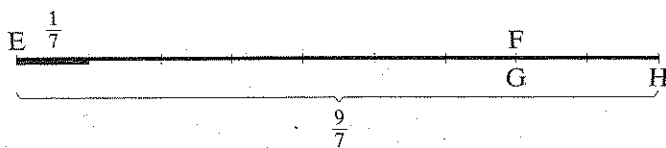
$$\overline{GH} = ?$$



$$\frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} \quad (\text{frazione corrispondente a } 16,2 \text{ cm})$$

$$16,2 \text{ cm} : 9 = \dots \text{ cm} \quad \left(\frac{1}{7} \right)$$

$$\dots \text{ cm} \cdot 7 = \dots \text{ cm} \quad \left(\frac{7}{7}, \overline{EF} \right) \quad \dots \text{ cm} \cdot 2 = \dots \text{ cm} \quad \left(\frac{2}{7}, \overline{GH} \right)$$



- 2 La differenza di età fra Marco e Giulia è di 6 anni; l'età di Giulia è $\frac{5}{8}$ di quella di Marco. Quanti anni ha Marco? Quanti anni ha Giulia?

Dati

$$\text{anni Marco} - \text{anni Giulia} = 6 \text{ anni}$$

$$\text{anni Giulia} = \frac{5}{8} \text{ anni Marco}$$

Domanda

$$\text{anni Marco} = ?$$

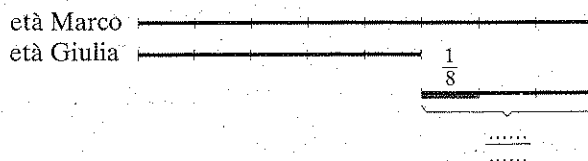
$$\text{anni Giulia} = ?$$

$$\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \quad (\text{frazione corrispondente a } 6 \text{ anni})$$

$$\dots \text{ anni} : \dots = \dots \text{ anni} \quad \left(\frac{1}{8} \right)$$

$$\dots \text{ anni} \cdot 8 = \dots \text{ anni} \quad \left(\frac{3}{8}, \text{età} \dots \right)$$

$$\dots \text{ anni} \cdot \dots = \dots \text{ anni} \quad \left(\frac{3}{8}, \text{età} \dots \right)$$



- 3 Il segmento AB è $\frac{7}{9}$ del segmento CD; la somma delle loro misure è 64 cm. Quanto misura ogni segmento? [28 cm; 36 cm]

- 4 Il segmento LM è $\frac{7}{10}$ del segmento NO; la differenza delle loro misure è 21 cm. Determina la lunghezza di LM e di NO. [49 cm; 70 cm]

- 5 La differenza di due numeri è 35 e un numero è $\frac{4}{9}$ dell'altro. Determina i due numeri. [28; 63]

- 6 Le pagine del libro di Anna sono 135; quelle occupate da figure sono $\frac{2}{13}$ delle altre. Quante sono le pagine con figure? E le altre? [18; 117]

- 7 Un numero è $\frac{3}{7}$ di un altro; la somma dei due numeri 120. Determinali. [36; 84]

Riassumiamo quello che abbiamo studiato...

LA FRAZIONE COME OPERATORE

