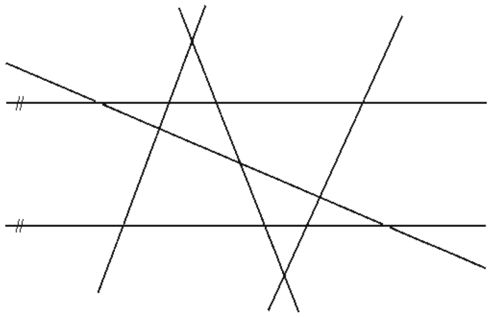
205. Dvojicí vnitřních úhlů přiléhajících k jedné straně čtyřúhelníku budeme nazývat ***sousedními vnitřními úhly***. Kolik dvojic sousedních vnitřních úhlů má každý čtyřúhelník?
Dvojicí vnitřních úhlů, které nepřiléhají k jedné straně čtyřúhelníku, budeme nazývat ***protilehlými vnitřními úhly.*** Kolik dvojic protilehlých vnitřních úhlů má každý čtyřúhelník?
a) Pro který čtyřúhelník platí, že součet aspoň jedné dvojice sousedních vnitřních úhlů je 180°?
b) Pro který čtyřúhelník platí, že součet všech dvojic sousedních vnitřních úhlů je 180°?
c) Pro který čtyřúhelník platí, že součet právě dvou dvojic sousedních vnitřních úhlů je 180°?
d) Najděte čtyřúhelník, pro který platí, že součet právě jedné dvojice sousedních vnitřních úhlů je 180°?
e) Pro který čtyřúhelník platí, že součet aspoň jedné dvojice protilehlých vnitřních úhlů je 180°?
f) Pro který čtyřúhelník platí, že součet všech dvojic protilehlých vnitřních úhlů je 180°?
g) Najděte čtyřúhelník, pro který platí, že součet právě jedné dvojice protilehlých vnitřních úhlů je 180°?

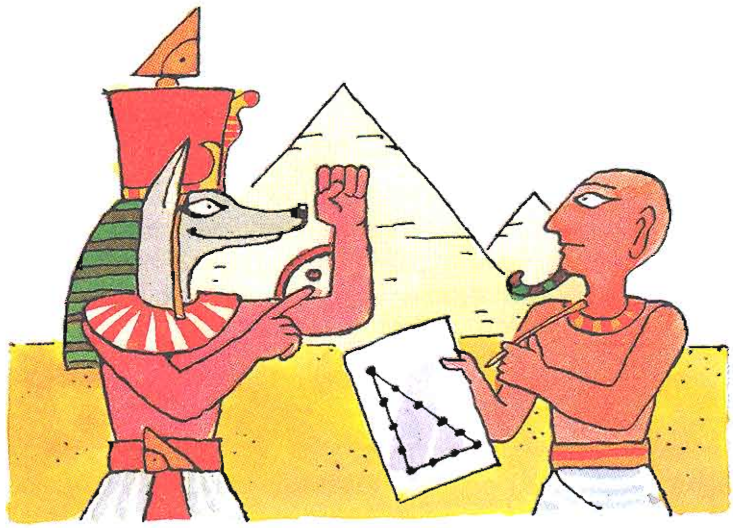
206. Kolik trojúhelníků a kolik čtyřúhelníků je na obrázku? Obrázek dvakrát překreslete do sešitu. Na jedné kopii vyznačte všechny dvojice vrcholových úhlů, na druhé kopii všechny dvojice souhlasných úhlů.



207. Na čtverečkovém papíru narýsujte trojúhelník *NOP* (*N*[3, 2], *O*[9, 2], *P*[7, 14]). Vypočtěte souřadnice středů *T, U, V* jeho stran a narýsujte trojúhelník *TUV*. V jakém poměru je obsah trojúhelníku *TUV* k obsahu trojúhelníku *NOP*?

2.2. Pythagorova věta

Kryšpín s Betkou prohlíželi velkou obrázkovou knížku s názvem Divy světa a zamýšleli se nad fotografiemi egyptských pyramid. V knížce psali, že pyramidy byly postaveny s přesností, o níž se stavitelům našich panelových sídlišť ani nesní. Jestliže základ pyramidy byl čtverec, jak vlastně staří Egypťané změřili pravý úhel, přemýšlela Betka. Nemohli si přece v obchodě koupit úhloměr nebo teodolit. Možná to udělali stejným způsobem, jako dědeček na zahrádce vyměřuje pravoúhlý záhon nebo jako jsme v létě na táboře vyměřovali volejbalové hřiště, mínil Kryšpín. Na provázku uděláš čtyři uzlíky tak, aby byly vzdáleny 3, 4 a 5 metrů. Pak provázek vypneš tak, aby uzlíky tvořily vrcholy trojúhelníku.



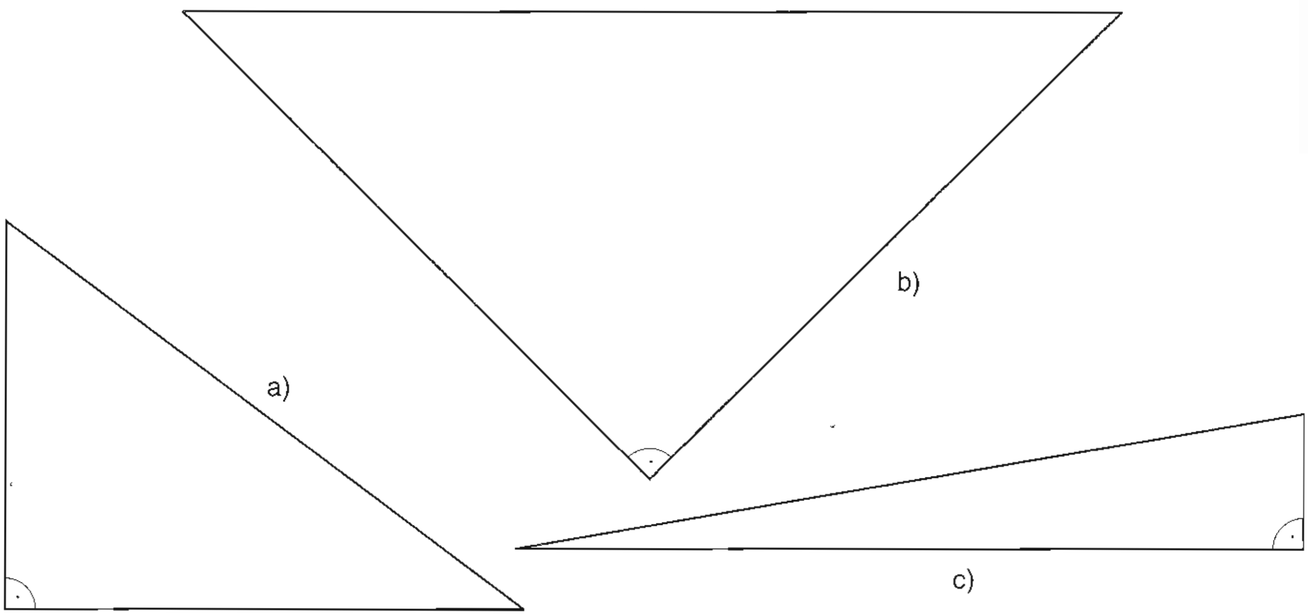
Vnitřní úhel při vrcholu, který je společný stranám s délkou 3 a 4 metry, je pravý.
Zajímavé přitom je, řekl Kryšpín Betce, *že druhá mocnina délky přepony je rovna součtu druhých mocnin délek odvěsen*:

$5^2 = 3^2 + 4^2$.

Jestli ti dobře rozumím, pátrala v paměti Betka, ***odvěsny*** v pravoúhlém trojúhelníku jsou strany, které svírají pravý úhel, a ***přepona*** je strana ležící proti pravému úhlu. Zkusíme, zda to platí i pro jiné pravoúhlé trojúhelníky.

Úloha 1

Na obrázku jsou narýsovány tři pravoúhlé trojúhelníky. Úhloměrem a měřítkem se přesvědčte, že tyto trojúhelníky jsou skutečně pravoúhlé a že v následující tabulce jsou správně uvedeny délky jejich stran (v milimetrech). Narýsujte tři další libovolné pravoúhlé trojúhelníky a po změření jejich stran doplňte tabulku. Porovnejte druhou mocninu délky přepony a součet druhých mocnin délek odvěsen. Odvěsny označujeme písmeny *a*, *b*, přeponu písmenem *c* (nebo malými písmeny protilehlých vrcholů).



	a (mm)	b (mm)	c (mm)	a^2 (mm^2)	b^2 (mm^2)	c^2 (mm^2)	$a^2 + b^2$ (mm^2)
a)	51	68	85	2 601	4 624	**7 225**	**7 225**
b)	87	87	124	7 569	7 569	**15 138**	**15 376**
c)	17	103	104	289	10 609	**10 816**	**10 898**

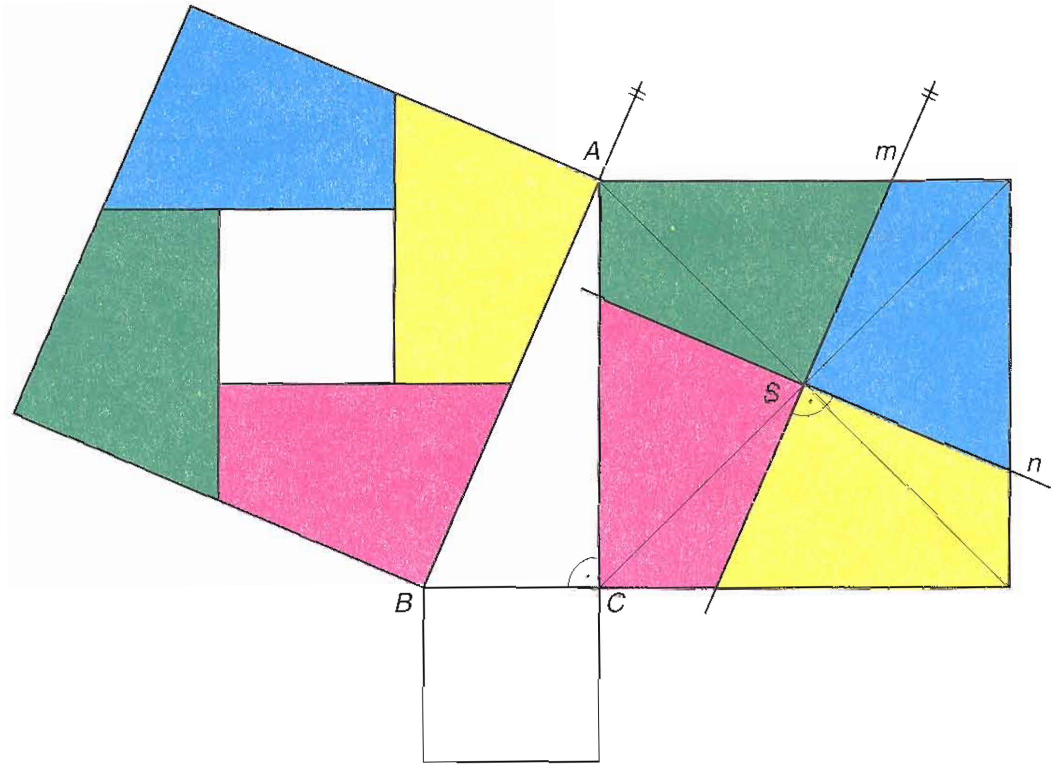
Výsledky měření v posledních dvou sloupcích tabulky ukazují, že druhá mocnina naměřené délky přepony (c^2) je vždy rovna nebo přibližně rovna součtu druhých mocnin naměřených délek odvěsen ($a^2 + b^2$). Některá čísla se v posledních dvou sloupcích tabulky nerovnají přesně, protože se při měření dopouštíme vždy chyb.

Pythagorova věta: Pro každý pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky c a odvěsnami délek a, b je
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Betka nevěřila, že k potvrzení (důkazu) Pythagorovy věty stačí nůžky a papír. Vyřešte s ní proto úlohu 2.

Úloha 2

Na obrázku je narýsován pravoúhlý trojúhelník *ABC* a čtverce, jejichž strany jsou shodné se stranami trojúhelníku. Přímky *m*, *n* procházejí středem *S* čtverce nad odvěsnou *AC*, jsou navzájem kolmé a přímka *m* je rovnoběžná s přeponou *AB*. Obrázek přerýsujte na průsvitný papír, vystřihněte čtverce nad odvěsnami *AC*, *BC* a rozstřihejte čtverec nad odvěsnou *AC* podél plných čar. Přesvědčte se, že čtverec nad přeponou *AB* můžeme složit ze čtverců nad odvěsnami *AC* a *BC*.



Úloha 3

Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník *KLM* s pravým úhlem při vrcholu *L*. Narýsujte čtverce nad přeponou a odvěsnami. Středem *S* čtverce nad delší odvěsnou veďte rovnoběžku *m* s přeponou. Narýsujte přímku *n* procházející středem *S* a kolmou k přímce *m*. Postupujte stejně jako v úloze 2 a přesvědčte se, že čtverec nad přeponou *KM* můžeme složit ze čtverců nad odvěsnami *KL* a *LM*.
Pozor: Každá nepřesnost v rýsování vede ke značným chybám ve výsledku.

Kryšpín připomněl Betce: Jestliže čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku můžeme složit ze čtverců nad odvěsnami tohoto trojúhelníku, znamená to, že

Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.

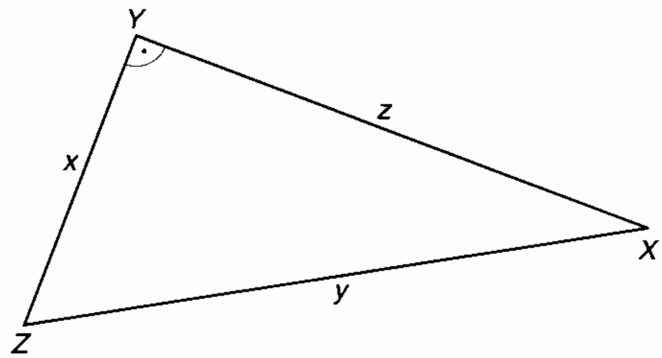
Betka přemýšlela, kdo asi byl ten Pythagoras a čím se zasloužil o to, aby po něm byla pojmenována matematická věta. V knížce s názvem Dějiny matematiky se s Kryšpínem dočetli, že řecký matematik *Pythagoras* žil v 5. století před naším letopočtem, zabýval se matematikou a filozofií. Říká se, že jeho přednášky byly tak zajímavé, že na ně tajně chodili i ženy, kterým tehdy nebylo dovoleno zabývat se vědou. Spolu se svými žáky byl Pythagoras přesvědčen, že čísla mají nadpřirozený význam, a některé své poznatky dokonce tajili.
Trojice čísel *a*, *b*, *c*, které jsou délkami stran pravoúhlých trojúhelníků a pro která tedy platí $c^2 = a^2 + b^2$, se nazývají ***pythagorejská čísla***.

Příkladem pythagorejských čísel je trojice čísel 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$) nebo trojice čísel 8, 15, 17 ($8^2 + 15^2 = 17^2$).

Příklad 1

Vypočtěte velikost třetí strany pravoúhlého trojúhelníku XYZ s pravým úhlem při vrcholu Y, jestliže platí:
a) $x = 3$ cm, $z = 4$ cm,
b) $x = 0{,}9$ m, $z = 1{,}2$ m,
c) $x = 27$ mm, $y = 0{,}34$ dm.

V pravoúhlém trojúhelníku XYZ s pravým úhlem při vrcholu Y je strana y přeponou, strany x, z jsou odvěsnami.



Podle Pythagorovy věty platí:

$y^2 = x^2 + z^2$.

Délky stran vyjádříme ve stejných jednotkách [a) cm, b) m, c) mm].

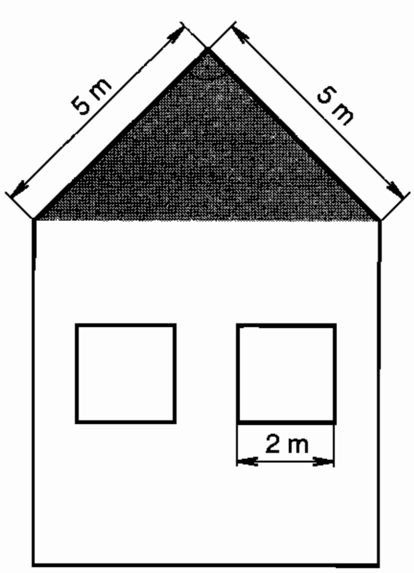
a) $y^2 = 32 + 4^2 = 9 + 16 = 25$,
$y^2 = 25$,
$y = \sqrt{25}$,
$y = 5$ cm.

b) $y^2 = 0{,}9^2 + 1{,}2^2 = 0{,}81 + 1{,}44 = 2{,}25$,
$y^2 = 2{,}25$,
$y = \sqrt{2{,}25}$,
$y = 1{,}5$ m.

c) $x = 27$ mm, $y = 34$ mm,
$34^2 = 27^2 + z^2$,
$z^2 = 34^2 - 27^2 = 1\,156 - 729 = 427$,
$z = \sqrt{427} = 20{,}66 \doteq 21$,
$z \doteq 21$ mm.

Příklad 2

Nákres průčelí domku na obrázku se skládá se ze čtverce a pravoúhlého trojúhelníku. Okna jsou čtvercová. Některé rozměry jsou uvedeny na obrázku. Vypočtěte zbývající rozměry a určete, kolik pětikilogramových plechovek barvy potřebujeme na dvojnásobný nátěr průčelí, jestliže spotřebujeme 1 kg barvy na 6 m^2 fasády.



Šedě vyznačený trojúhelník je pravoúhlý.
Jeho přepona je zároveň stranou čtverce tvořícího zbývající část průčelí. Označme délku této strany písmenem x.
Podle Pythagorovy věty je

$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$,
$x = \sqrt{50}$,
$x \doteq 7{,}07$ m.

Obsah obrazce (S) tvořícího průčelí vypočteme tak, že od součtu obsahů pravoúhlého trojúhelníku (T) a čtverce (C) odečteme dvojnásobek obsahu okna (O):

$S = T + C - 2 \,.\, O = \frac{1}{2} \,.\, 5 \,.\, 5 + 7{,}07^2 - 2 \,.\, 2^2 = 12{,}5 + 49{,}98 - 8 = 54{,}48,$
$S = 54{,}48 \text{ m}^2.$

Při dvojnásobném nátěru musíme mít barvu na nátěr 108,96 m^2. Při spotřebě 1 kg barvy na 6 m^2 je třeba

108,96 : 6 = 18,16.

Odpověď: Na nátěr průčelí spotřebujeme přibližně 18,16 kg barvy, musíme tedy koupit 4 pětikilogramové plechovky.

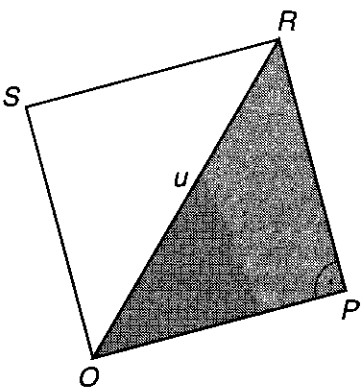
■ Úloha 4

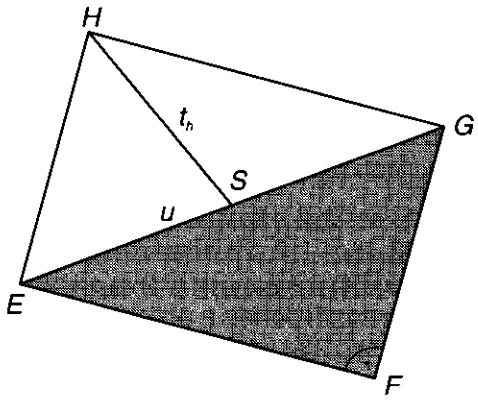
Doplňte následující tabulku tak, aby čísla *a*, *b*, *c* tvořila trojice pythagorejských čísel. Víme, že čísla 3, 4, 5 v prvním sloupci tvoří trojici pythagorejských čísel.

a	3	5	6	7	8	9	10	
b	4	12			15			35
c	5			25		41	26	37

● Příklad 3

a) Narýsujte čtverec *OPRS* se stranou délky 5 cm, jeho úhlopříčku $u = OR$ a vypočtěte její délku (obr. a).
b) Narýsujte obdélník *EFGH* se stranami $|EF| = 70$ mm, $|FG| = 50$ mm, jeho úhlopříčku $u = EG$ a vypočtěte její délku (obr. b).
c) V trojúhelníku *EGH* narýsujte těžnici t_h a vypočtěte její délku (obr. b).





a) V trojúhelníku *OPR* je úhlopříčka *u* přeponou. Platí tedy

$u^2 = 5^2 + 5^2 = 2 \,.\, 5^2 = 50,$
$u = \sqrt{50} \doteq 7{,}07,$
$u \doteq 7{,}07 \text{ cm}.$

Jinak vyjádříme délku úhlopříčky takto:

$u = \sqrt{2 \,.\, 5^2} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \,.\sqrt{25} = \sqrt{2} \,.\, 5 = \mathbf{5 \,.\, \sqrt{2}} \doteq 5 \,.\, 1{,}414\,21 \doteq 7{,}07$

Tučně vytištěný výraz upravíme tak, aby platil pro všechny čtverce:

Pro délku úhlopříčky *u* každého čtverce se stranou délky *a* platí $u = a \,.\, \sqrt{2}.$

b) V trojúhelníku *EFG* je úhlopříčka *u* přeponou. Platí tedy

$u^2 = 70^2 + 50^2 = 4\,900 + 2\,500 = 7\,400,$

$u = \sqrt{\mathbf{70^2 + 50^2}} = \sqrt{7\,400} \doteq 86{,}02,$

$u \doteq 86{,}02$ mm.

Tučně vytištěný výraz upravíme tak, aby platil pro všechny obdélníky:

> Pro délku úhlopříčky *u* každého obdélníku se stranami délek *a*, *b* platí $u = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c) Každý obdélník je středově souměrný. Středem souměrnosti je průsečík úhlopříček. Důsledkem toho je, že se úhlopříčky obdélníku půlí. Těžnice t_h v trojúhelníku *EGH* je úsečka, jejímž jedním krajním bodem je vrchol *H*, druhým krajním bodem je střed úhlopříčky *EG*. Délka těžnice t_h je rovna polovině délky úhlopříčky *FH*. Délky úhlopříček v obdélníku se rovnají, proto

$|FH| = |EG| = 86{,}02$ mm,

$t_h = \frac{1}{2} \cdot |FH| = \frac{1}{2} \cdot |EG| = \frac{1}{2} \cdot 86{,}02 = 43{,}01,$

$t_h = 43{,}01$ mm.

To je zajímavé, povídá Betka kamarádce Hance, když dopočítali příklad. Každý pravoúhlý trojúhelník mohu přece doplnit na obdélník, jehož úhlopříčkou je přepona trojúhelníku. To pak znamená, že délka těžnice na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku je vždy rovna polovině délky přepony.

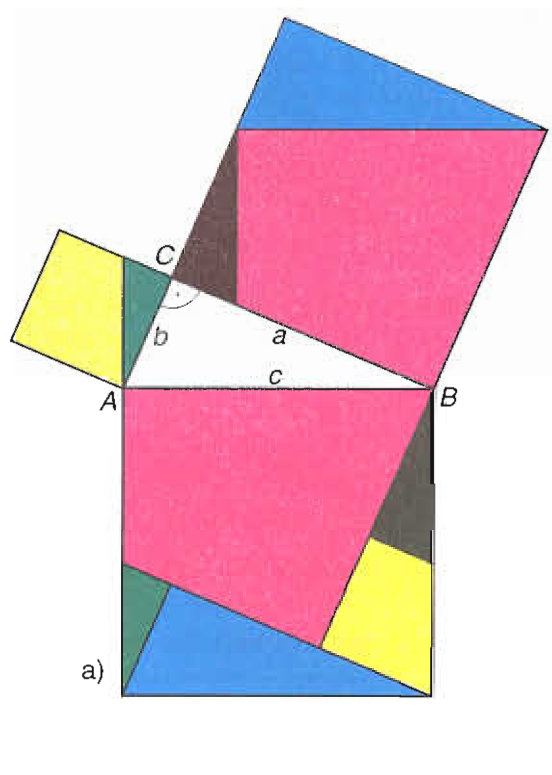
> Délka těžnice na přeponu v každém pravoúhlém trojúhelníku je rovna polovině délky přepony.

● Cvičení

208. V soustavě souřadnic narýsujte pravoúhlé trojúhelníky podle tohoto zadání: *ABC* (*A*[5, 2], *B*[1, 14], *C*[1, 2]), *LMN* (*L*[12, 1], *M*[12, 20], *N*[6, 20]), *OPR* (*O*[16, 11], *P*[21, 21], *R*[13, 17]), *TUV* (*T*[23, 1], *U*[33, 11], *V*[18, 6]). Určete souřadnice čtvrtého vrcholu, který vznikne doplněním každého z uvedených trojúhelníků na obdélník. Narýsujte tyto obdélníky a přesvědčte se, že jste souřadnice čtvrtých vrcholů určili správně (na čtverečkovém papíru je narýsujete do jednoho obrázku).

209. Narýsujte na čtverečkovém papíru trojúhelník *ABC* (*A*[10, 10], *B*[2, 2], *C*[10, 2]). Přesvědčte se, že trojúhelník *ABC* je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *C*. Narýsujte čtverce nad přeponou a oběma odvěsnami. Určete jejich obsahy spočítáním čtverečků ležících uvnitř každého ze tří narýsovaných čtverců. Počet polovičních čtverečků vydělte dvěma. Přesvědčte se, že platí Pythagorova věta.

210. Další možnost geometrického ověření Pythagorovy věty je patrná z obrázku a). Překreslete ho na průsvitný papír, vystřihněte a přesvědčte se, že obsah čtverce nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami. Části čtverců nad odvěsnami jsou vybarveny tak, aby jejich složením vznikl čtverec nad přeponou.

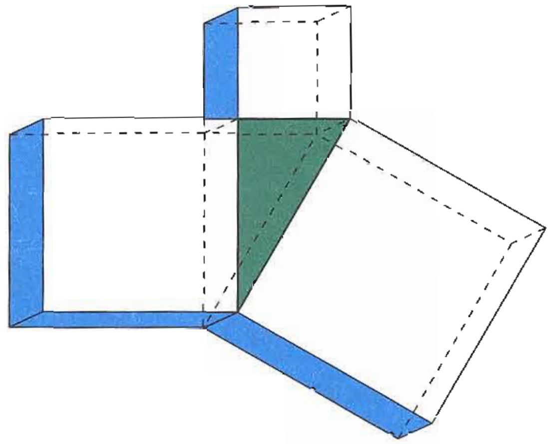


a)

211. Platí Pythagorova věta také v trojrozměrném prostoru? Obkreslete celuloidové trojúhelníkové pravítko s úhly 30°, 60°, 90° na polystyrénovou desku tloušťky 2 až 3 cm a narýsujte na ní čtverce nad přeponou a odvěsnami. Po poradě s učitelem technických prací je vyřízněte (viz obrázek). Na laboratorních vahách porovnejte hmotnost hranolu nad přeponou a součet hmotností hranolů nad oběma odvěsnami. Poraďte se s učitelem matematiky a fyziky, jak vysvětlíme zjištěný výsledek.

212. V tabulce jsou uvedeny délky stran trojúhelníků.
Rozhodněte, zda se jedná o pravoúhlé trojúhelníky.

Trojúhelník č.	Odvěsna	Odvěsna	Přepona
1	16 cm	0,63 m	650 mm
2	9 cm	150 mm	170 mm
3	0,7 km	2 400 m	2,5 km
4	9 mm	40 mm	41 mm
5	2,7 m	3,6 m	4,5 m
6	10 dm	2,5 m	260 cm
7	21 m	200 dm	2 900 cm
8	12 cm	350 mm	3,7 dm
9	1,5 m	0,8 m	1,8 m



213. Doplňte v tabulce údaje o pravoúhlých trojúhelnících.

Délka odvěsny (cm)	Délka odvěsny (cm)	Délka přepony (cm)	Obvod	Obsah	Délka těžnice na přeponu
	12	20			
12		13			
$\sqrt{3}$	1				
1	3				
12	9				
0,7	2,4				
	1,5	1,7			
	1	$\sqrt{2}$			

214. a) Narýsujte pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 5 cm a odvěsnami délek 3 cm a 4 cm. Nad přeponou narýsujte rovnostranný trojúhelník se stranou délky 5 cm. Podobně sestrojte rovnostranné trojúhelníky nad oběma odvěsnami. Přesvědčte se výpočtem, že *obsah rovnostranného trojúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů rovnostranných trojúhelníků nad oběma odvěsnami.*
b) Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník a rovnostranné trojúhelníky nad jeho přeponou a oběma odvěsnami. Změřte s přesností na milimetry strany a výšky rovnostranných trojúhelníků a přesvědčte se, že platí tvrzení uvedené ve cvičení a). Vezměte v úvahu možnou chybu způsobenou měřením.

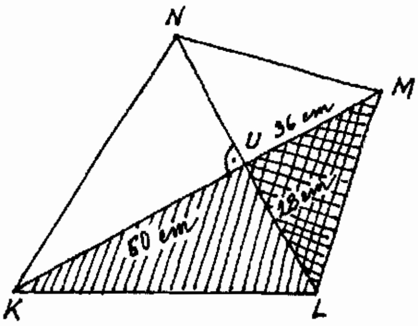
2.3. Pythagoras řeší úlohy za nás

Staří Egypťané užívali poznatků o stranách pravoúhlého trojúhelníku nejen k vyměřování základů pyramid, ale i k vyměřování pozemků po každoročních záplavách Nilu. Pan učitel v Betčině třídě vyprávěl o staroegyptských zeměměřičích jako o vysoce vážených lidech, kteří svoje vědomosti uchovávali v tajnosti. Tabulky pythagorejských čísel jsou zachovány na papyrech. Zachované papyry jsou dokladem toho, že staří Egypťané byli dobří matematici.

V naší civilizaci potkáváme pravé úhly a pravoúhlé trojúhelníky na každém kroku. Ukážeme si, k čemu všemu se nám Pythagorova věta hodí.

● Příklad 1

Kryšpín s Petrem se rozhodli vyrobit jednoduchého draka ve tvaru čtyřúhelníku, souměrného podle jedné úhlopříčky. K úvahám nad rozměry draka jim sloužil tento náčrtek:



Rozmýšleli, kolik latěk délky 1 m musí k výrobě draka koupit. Z latěk budou nejen úhlopříčky, ale i strany čtyřúhelníku.

Vrcholy čtyřúhelníku jsou označeny písmeny K, L, M, N. Čtyřúhelník je souměrný podle úhlopříčky KM (v matematice se nazývá takový čtyřúhelník ***deltoid***), tedy úhlopříčky jsou navzájem kolmé a platí

$|KL| = |KN|$, $\quad |LM| = |NM|$, $\quad |UL| = |UN|$.

Podle Pythagorovy věty platí

$|KL|^2 = 50^2 + 28^2 = 3\,284$, $\quad |LM|^2 = 36^2 + 28^2 = 2\,080$,
$|KL| = \sqrt{3\,284}$, $\quad |LM| = \sqrt{2\,080}$,
$|KL| \doteq 57{,}31$ cm, $\quad |LM| \doteq 45{,}62$ cm.

Obvod čtyřúhelníku je roven

$|KL| + |LM| + |MN| + |NK| = 2 \,.\, 57{,}31 + 2 \,.\, 45{,}62 = 205{,}86$,
$|KL| + |LM| + |MN| + |NK| = 205{,}86$ cm.

Součet délek úhlopříček je roven

$|KM| + |LN| = 86 + 56 = 142$,
$|KM| + |LN| = 142$ cm.

Chlapci spotřebují celkem 142 + 205,86 = 347,86 cm latěk. Kolik latěk délky 1 m musí koupit?
Na úhlopříčku KM spotřebují celou laťku, zbytek se už k ničemu nehodí. Na strany KL a KN ale spotřebují také celé laťky, protože zbytek je kratší než strana LM.
To je příliš velký odpad, usoudil Kryšpín. Laťky jsou drahé. Zkusme zkrátit úsečku UM. Chlapci provedli bleskově několik výpočtů, v nichž postupně zkracovali úsečku UM vždy o 1 cm:

$|LM| = \sqrt{28^2 + \mathbf{35^2}} \doteq 44{,}82$, $\quad |LM| \doteq 44{,}82$ cm,

$|LM| = \sqrt{28^2 + \mathbf{34^2}} \doteq 44{,}05$, $\quad |LM| \doteq 44{,}05$ cm,

$|LM| = \sqrt{28^2 + \mathbf{33^2}} \doteq 43{,}28$, $\quad |LM| \doteq 43{,}28$ cm,

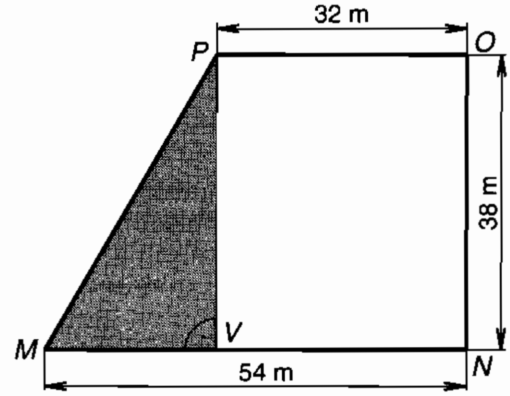
$|LM| = \sqrt{28^2 + \mathbf{32^2}} \doteq 42{,}52$, $\quad |LM| \doteq 42{,}52$ cm.

Teprve poslední výsledek je uspokojil (42,52 + 57,31 < 100), neboť laťku délky 1 m využijí pro stranu KL i pro stranu LM a drak bude stejně krásný, usoudil Petr.

Odpověď: Chlapci koupili 4 laťky délky 1 metr.

Příklad 2

Parcela má tvar pravoúhlého lichoběžníku, její rozměry jsou uvedeny na obrázku. Vypočtěte její obsah a obvod.



K výpočtu obsahu parcely máme dost informací. Lichoběžník $MNOP$ je pravoúhlý, jeho výška je rovna délce strany NO.

$S = \frac{1}{2} \cdot v \cdot (|MN| + |OP|) = 0{,}5 \cdot 38 \cdot (54 + 32) = 1\,634,$
$S = 1\,634\ \text{m}^2.$

Pro výpočet obvodu musíme znát délku strany MP. Narýsujeme kolmici k přímce MN procházející bodem P, její patu označíme V. Trojúhelník MVP je pravoúhlý. Délka strany MV je rovna rozdílu délek základen lichoběžníku (čtyřúhelník $VNOP$ je obdélník). Podle Pythagorovy věty platí

$|MP|^2 = |MV|^2 + |VP|^2 = 22^2 + 38^2 = 1\,928,$
$|MP| = \sqrt{1\,928} = 43{,}91 \doteq 44,$
$|MP| \doteq 44\ \text{m}.$

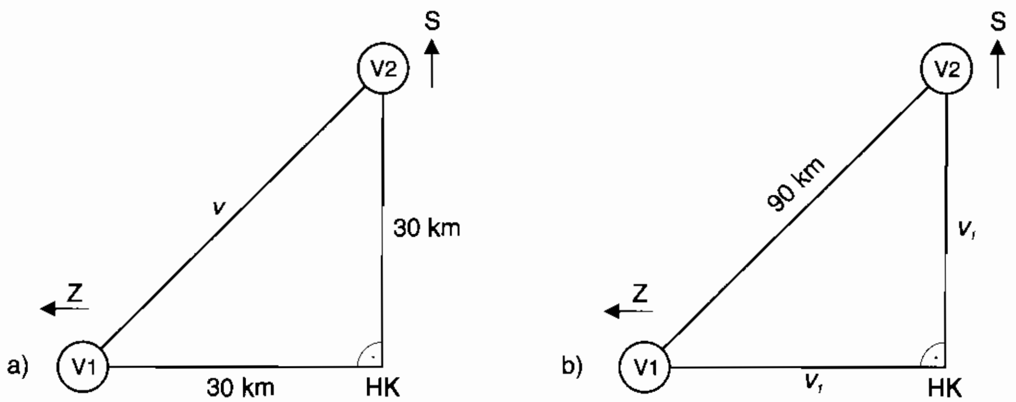
Pro obvod pozemku platí

$o = |MN| + |NO| + |OP| + |PM| = 54 + 38 + 32 + 44 = 168,$
$o = 168\ \text{m}.$

Odpověď: Obvod pozemku je 168 m, jeho obsah je 1 634 m^2.

Příklad 3

Dva vlaky vyjely z Hradce Králové stejnou rychlostí, jeden na sever, druhý na západ.
a) Vypočtěte jejich vzdálenost měřenou vzdušnou čarou poté, kdy každý ujel 30 km.
b) Vypočtěte jejich vzdálenost od Hradce Králové, jestliže jejich vzdálenost měřená vzdušnou čarou je 90 km.



a) Z obrázku a) je zřejmé, že vzdálenost v obou vlaků měřená vzdušnou čarou je přeponou v rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku, jehož ramena mají délku 30 km a hlavní vrchol leží ve výjezdní stanici HK (Hradec Králové). Podle Pythagorovy věty platí

$v^2 = 30^2 + 30^2 = 1\,800,$
$v = \sqrt{1\,800} \doteq 42{,}43,$
$v \doteq 42{,}43$ km.

Odpověď: Po ujetí 30 km je vzdálenost obou vlaků 42,43 km.

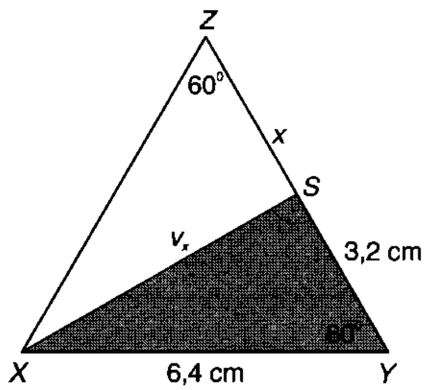
b) Z obrázku b) je patrné, že vzdálenosti obou vlaků od Hradce Králové jsou délky ramen rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s podobnými vlastnostmi jako v příkladu a). Platí tedy

$90^2 = v_1{}^2 + v_1{}^2 = 2 \,.\, v_1{}^2,$
$v_1{}^2 = 8\,100 : 2 = 4\,050,$
$v_1 = \sqrt{4\,050} \doteq 63{,}640,$
$v_1 \doteq 63{,}640$ km.

Odpověď: Vzdálenost obou vlaků je 90 km ve chvíli, kdy oba ujedou přibližně 64 km od Hradce Králové.

● Příklad 4

Rovnostranný trojúhelník XYZ má délku strany $x = 6{,}4$ cm. Narýsujte ho, určete vnitřní úhly, vypočtěte jeho výšky, obvod a obsah, najděte osy stran a úhlů a střed souměrnosti, pokud existují.



Obvod rovnostranného trojúhelníku je roven trojnásobku délky strany: $o = 3 \,.\, 6{,}4 = 19{,}2$ cm.

Protože jsou strany shodné, jsou shodné i vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku. Součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180°, proto *každý vnitřní úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost* 60°.

Osy souměrnosti jsou tři osy vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku. Jsou kolmé na protilehlé strany a procházejí jejich středy. *Osy souměrnosti rovnostranného trojúhelníku proto splývají s osami vnitřních úhlů i s osami stran. Částmi os souměrnosti jsou výšky a těžnice rovnostranného trojúhelníku.*

Výškou v_x je v rovnostranném trojúhelníku XYZ úsečka XS. Bod S je střed strany YZ. Podle Pythagorovy věty platí v trojúhelníku XYS

$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + v_x^2,$
$6{,}4^2 = 3{,}2^2 + v_x^2,$
$v_x^2 = 6{,}4^2 - 3{,}2^2 = 30{,}72,$
$v_x = \sqrt{30{,}72} \doteq 5{,}54,$
$v_x \doteq 5{,}54$ cm.

Všechny tři výšky v rovnostranném trojúhelníku jsou shodné, jejich délky se proto rovnají.
Pro obsah trojúhelníku XYZ platí

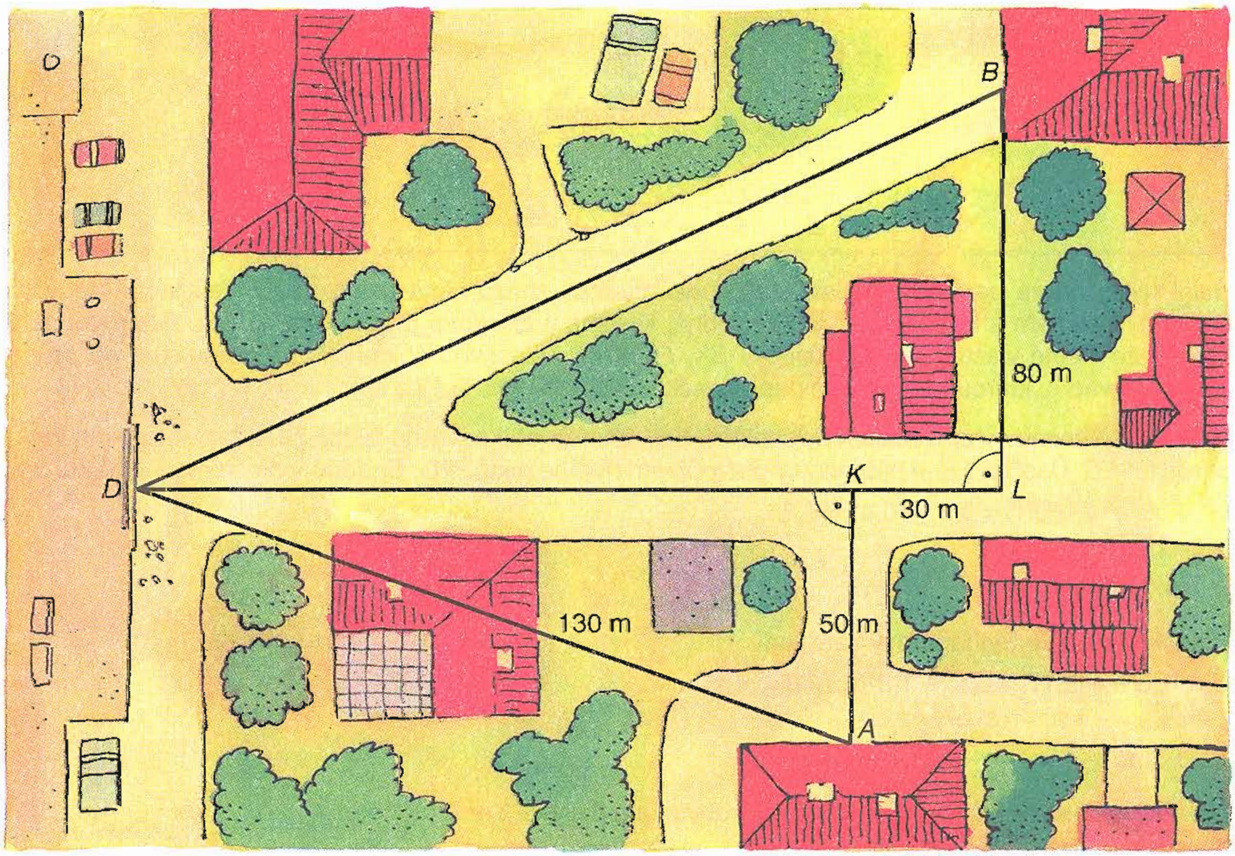
$S = \frac{1}{2} \cdot v_x \cdot x = 0{,}5 \cdot 5{,}54 \cdot 6{,}4 = 17{,}728 \doteq 17{,}73$,

$S \doteq 17{,}73\ \mathrm{cm}^2$.

Střed souměrnosti trojúhelníku XYZ musí mít tuto vlastnost:
Otočíme-li trojúhelník kolem středu souměrnosti o 180°, musí se krýt s trojúhelníkem v původní poloze. Přerýsujte trojúhelník XYZ na průsvitný papír, vystřihněte ho, položte na původní trojúhelník XYZ a opatrně propíchněte hrotem kružítka v průsečíku výšek. Otočíme-li trojúhelník z průsvitného papíru o 180°, nekryje se s původním trojúhelníkem XYZ. Stejný výsledek dostaneme při otáčení ve směru nebo proti směru hodinových ručiček. Zvolíme-li hrotem kružítka střed souměrnosti v jiném bodě, nedospějeme nikdy k tomu, aby se trojúhelníky po otočení kryly. *Rovnostranný trojúhelník nemá střed souměrnosti.*

Příklad 5

Kryšpín s Petrem si domluvili schůzku na diskotéce. Který z nich přijde první, jestliže oba vycházejí ihned po zavěšení telefonu a jdou stejnou rychlostí, přičemž Kryšpín jde z domova po cestě AKD (viz obrázek) a Petr po cestě BD?



V pravoúhlém trojúhelníku AKD platí podle Pythagorovy věty

$|AD|^2 = |AK|^2 + |KD|^2$,

$130^2 = 50^2 + |KD|^2$,

$|KD|^2 = 130^2 - 50^2 = 14\,400$,

$|KD| = \sqrt{14\,400} = 120$,

$|KD| = 120$ m.

V pravoúhlém trojúhelníku DLB platí podle Pythagorovy věty

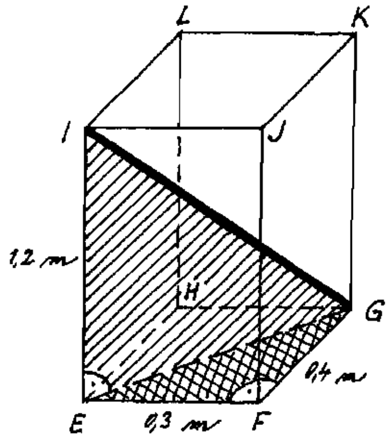
$|DB|^2 = |DL|^2 + |LB|^2$, kde $|DL| = |KD| + 30 = 150$ m.
$|DB|^2 = 150^2 + 80^2 = 28\,900$,
$|DB| = \sqrt{28\,900} = 170$,
$|DB| = 170$ m.

Délka Kryšpínovy cesty je $|AK| + |KD| = 50 + 120 = 170$ m, délka Petrovy cesty je $|BD| = 170$ m.

Odpověď: Kryšpín s Petrem přišli na schůzku do diskotéky současně.

● Příklad 6

Vypočtěte největší možnou délku tyčky, která se vejde do krabice tvaru kvádru s rozměry uvedenými na náčrtku.



Nejdelší tyčka, která se vejde do krabice, je na obrázku znázorněna úsečkou IG. Její krajní body patří nesousedním stěnám a každý leží v jiné základně. Říkáme jí ***tělesová úhlopříčka*** kvádru. Na první pohled je zřejmé, že stejné vlastnosti mají i úsečky EK, FL a HJ. Tělesovou úhlopříčku IG odlišujeme od ***stěnové úhlopříčky*** kvádru, kterou představuje např. úsečka EG (nebo FK, GJ, LJ aj.).

Úsečka IG je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku EGI. Známe jeho odvěsnu IE ($|IE| = 1{,}2$ m), neznáme však jeho odvěsnu EG. Úsečka EG je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku EFG. Snadno vypočteme její délku:
$|EG|^2 = |EF|^2 + |FG|^2 = 0{,}3^2 + 0{,}4^2 = 0{,}25$,
$|EG| = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$,
$|EG| = 0{,}5$ m.

Pro úsečku IG podle Pythagorovy věty platí
$|IG|^2 = |EG|^2 + |EI|^2 = 0{,}5^2 + 1{,}2^2 = 1{,}69$,
$|IG| = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$,
$|IG| = 1{,}3$ m.

Odpověď: Nejdelší tyčka, která se vejde do krabice, má délku 1,3 m.

● Cvičení

215. Vymodelujte pomocí špejlí a modelíny draka podle obrázku z příkladu 1 a draka - bednu (Matematika s Betkou 1, s. 49). Na modelech hledejte různé pravoúhlé trojúhelníky. Změřte pravítkem délky dvou stran těchto trojúhelníků a vypočtěte délku třetí strany pomocí Pythagorovy věty. Měřením se přesvědčte o správnosti výpočtu.

216. Elektrikář chce vyměnit žárovku na stožáru ve výši 5 m 20 cm. Má k dispozici žebřík délky 3 m, který je opřen o zem ve vzdálenosti 1 m od stožáru. Jestliže elektrikář vzpaží, dosáhne do výše 2 m 25 cm. Podaří se mu vyměnit žárovku nebo si musí opatřit vyšší žebřík?

217. Podstavy trojbokého hranolu mají tvar pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna má délku 16 cm a přepona 20 cm. Vypočtěte výšku a povrch hranolu, víte-li, že jeho objem je 2 352 cm^2.

218. V soustavě souřadnic na čtverečkovém papíru narýsujte trojúhelník *ABC* (*A* [0, 0], *B* [11, 2], *C* [3, 6]). Přesvědčte se, že trojúhelník *ABC* je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *C*.
Návod: Vypočtěte délku strany *AB* např. z trojúhelníku *AXB* (*X* [11, 0]), délku strany *BC* např. z trojúhelníku *BYC* (*Y* [11, 6]) a délku strany *AC* např. z trojúhelníku *AZC* (*Z* [3, 0]). Ukažte, že pro vypočítané délky stran trojúhelníku *ABC* platí Pythagorova věta.

219. Na obrázku narýsovaná „housenka" má hlavičku tvaru čtverce se stranou délky 4 cm. Snadno přijdete na způsob, jak bude pokračovat její tělo. Mohlo by pokračovat do nekonečna. Vypočtěte délku strany čtverce vybarveného červeně.